УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Ш26

Одобрено Научно-редакционным советом корпорации «Российский учебник» под председательством академиков Российской академии наук В. А. Тишкова и В. А. Черешнева

При оформлении книги использованы фрагменты рисунков академика *А. Т. Фоменко*

Шарыгин, И. Ф.

Ш26 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10—11 классы : учебник / И. Ф. Шарыгин. — 7-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2019. — 236, [4] с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-358-17539-6

Учебник входит в учебно-методический комплекс по математике для 10—11 классов и реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения курса стереометрии. Особое внимание уделено методам решения геометрических задач, а также реализовано дифференцированное изложение учебного материала: знаком (*) отмечен материал для углублённой подготовки; буквой (**в**) — важные, (**п**) — полезные, (**т**) — трудные задачи.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования, рекомендован Министерством просвещения РФ и включён в Федеральный перечень учебников.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-358-17539-6

Введение

Но надо жить без самозванства,
Так жить, чтобы в конце концов
Привлечь к себе любовь Пространства,
Услышать будущего зов.

Б. Пастернак

Вам наверняка известна следующая задача-головоломка.

Сложите шесть спичек так, чтобы они образовали четыре равносторонних треугольника со стороной, равной стороне спички.

Для решения этой задачи надо выйти в пространство и сложить спички в виде пирамиды так, как показано на рисунке 1. То, что невозможно на плоскости, оказывается возможным в пространстве.

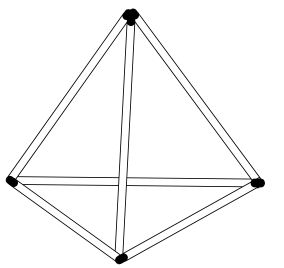


Рис. 1

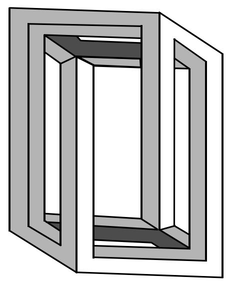
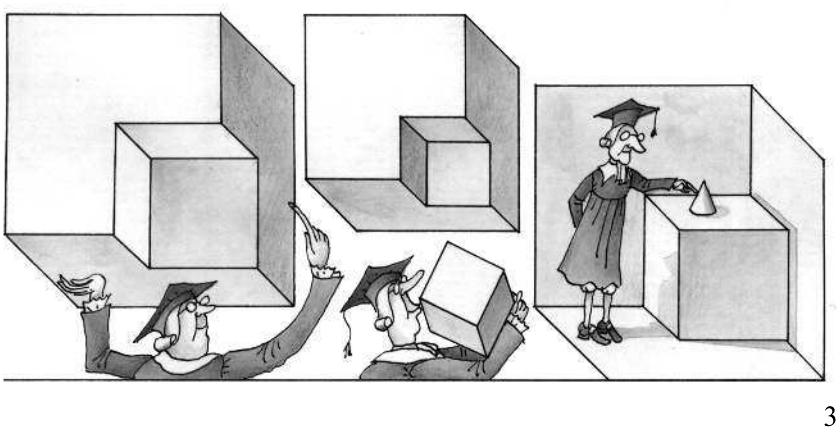


Рис. 2

А теперь посмотрите на рисунок 2. Не надо обладать хорошим пространственным воображением, чтобы понять, что странная



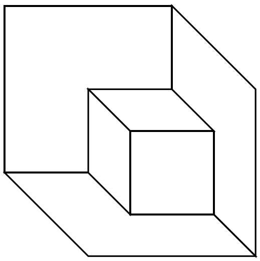


Рис. 3

конструкция, изображённая на этом рисунке, — *невозможный объект*. Оказывается, и такое возможно.

Планиметрия изучает свойства плоскости и плоских фигур. Но всё это — математические абстракции, объекты, реально не существующие. Стереометрия — раздел геометрии, изучающий свойства реального трёхмерного пространства и трёхмерных тел. Подобно тому как физики изучают свойства идеальных газов и жидкостей, математики изучают идеальные тела, идеальные по форме и размерам, не существующие в природе. Поэтому в какой-то степени стереометрия — «родственница» физики. В определённом смысле математики и физики разделили сферы интересов. Физики изучают цвет, массу, теплопроводность и прочие характеристики. Математики же интересуются лишь формой и размерами тел.

А что изображено на рисунке 3? Одни на этом рисунке увидят угол комнаты, в котором расположен куб, другие — куб с вырезанным углом. Наконец, можно увидеть два куба: большой и «приделанный» к нему маленький. Это изображение следует отнести к категории *неоднозначных*.

Рисунки 2 и 3 специально придуманы. Подобные приёмы нередко используют в своём творчестве художники. Появление таких чертежей при доказательстве теоремы или при решении задачи свидетельствует о неумении делать стереометрические чертежи, о незнании законов изображения тел.

Наиболее удобны для изображения *многогранники*, особенно простейшие: треугольная пирамида, куб, призма и т. д. Обратим внимание на то, что на стереометрическом чертеже изображают все рёбра соответствующего многогранника, при этом видимые рёбра изображают сплошными линиями, а невидимые — прерывистыми (пунктирными).

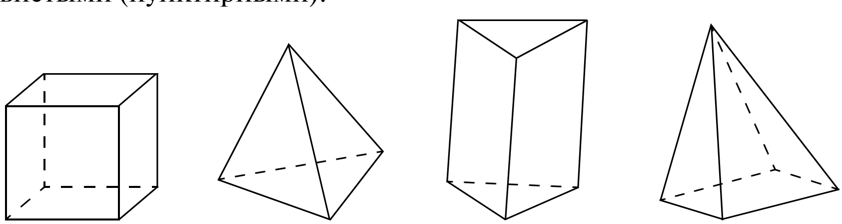


Рис. 4

На рисунке 4 изображены куб, треугольная и четырёхугольная пирамиды и треугольная призма. «Увидеть» эти многогранники нетрудно. А вот на рисунке 5 изображён конус и... Что? Догадаться, что вторая фигура является изображением шара, нелегко. Среди изучаемых в курсе стереометрии основных тел наиболее неудобным для изображения является шар. Поэтому при решении многих задач, в условии которых фигурирует шар, его, как правило, не рисуют. На соответствующем чертеже указывают только его центр и несколько характерных точек.

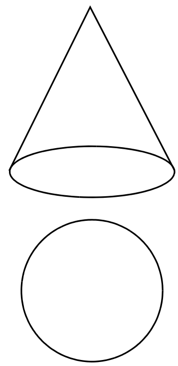


Рис. 5

Задачи, задания, вопросы

1. Сложите 12 спичек так, чтобы они образовали 6 квадратов со стороной, равной спичке.

2. Придумайте несколько различных многогранников. (Эти многогранники должны отличаться не только размерами.)

3. Сколько рёбер может иметь многогранник с пятью вершинами?

4. Школьник нарисовал несколько многогранников, а затем в каждом изображении стёр все внутренние линии, оставив лишь контур. В результате получились многоугольники, изображённые на рисунке 6. Для каждого из этих многоугольников укажите, какой многогранник мог быть нарисован учеником. В каждом случае постарайтесь найти несколько решений.

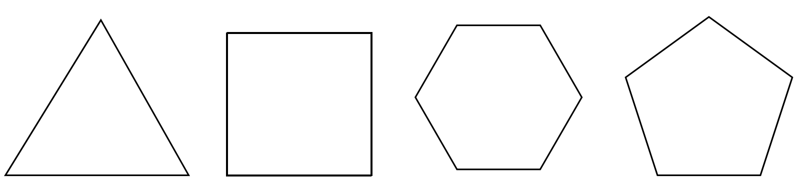
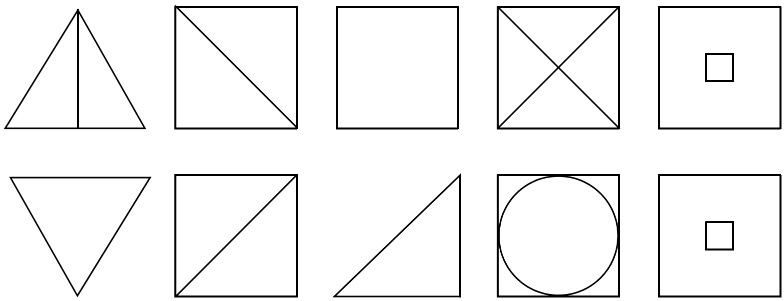


Рис. 6

5. На каждом из рисунков 7, *а—д* изображены вид спереди и вид сверху некоторого тела. Для каждой пары укажите тело, которое может так выглядеть. (Отсутствие на рисунках пунктирных линий означает, что у соответствующего тела нет невидимых рёбер или что эти невидимые линии скрыты за линиями видимыми.)



а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рис. 7

6. Придумайте изображение какого-нибудь «невозможного» тела.

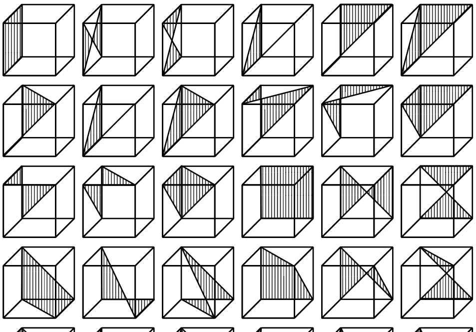
7 (т). Существует ли многогранник с нечётным числом рёбер, все грани которого — многоугольники с чётным числом сторон?

8. Докажите, что существует многогранник с любым числом рёбер, бо́льшим 5 и не равным 7.

9 (т). Куб — это шестигранник, у которого имеется 8 вершин и 12 рёбер. Все грани куба — четырёхугольники. Придумайте какой-нибудь шестигранник, у которого 8 вершин и 12 рёбер, причём есть грани с числом сторон, не равным четырём. Возможен ли шестигранник, у которого четыре грани — треугольники, а две оставшиеся — шестиугольники?

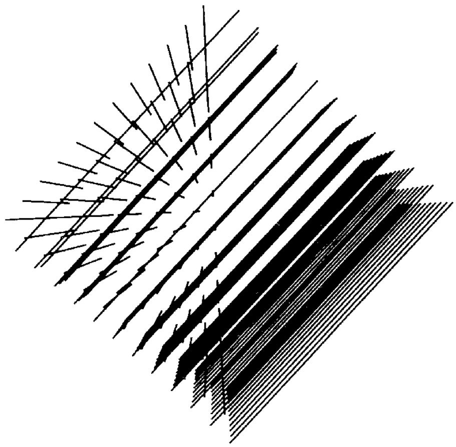
10. Возможно ли, чтобы у многогранника нашлась грань, являющаяся многоугольником с числом сторон большим, чем число граней у многогранника?

10 класс



1

Прямые и плоскости в пространстве

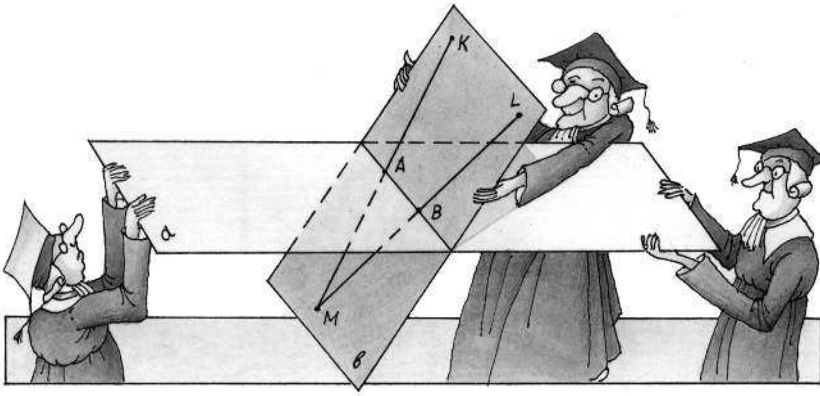


1.1. Основные свойства пространства

Трёхмерное пространство — это реальное пространство, в котором мы живём и свойства которого познаём буквально со дня рождения, в то время как плоскость — двухмерное пространство — есть математическая абстракция, существующая лишь в воображении. Однако при изучении геометрии мы идём от плоскости к пространству. Такая последовательность с точки зрения математики выглядит более удобной и логичной.

Изучение геометрии пространства так же, как и геометрии на плоскости, начинают с введения основных неопределяемых объектов и перечисления их свойств. Итак, какие же объекты будем считать неопределяемыми?

Во-первых, как и в планиметрии, в пространстве имеются *точки* и *прямые*. Их свойства ничем не отличаются от свойств, которые мы изучали ранее. Например, как и на плоскости, *через любые две точки в пространстве проходит единственная*



прямая. Но кроме точек и прямых, в пространстве имеются ещё и плоскости.

Можно спросить: «Что такое плоскость?» Однако точного ответа на этот вопрос дать невозможно. На самом деле плоскость — это такая же математическая абстракция, как и точка или прямая, о которых мы говорили раньше. С точки зрения наглядных представлений плоскость — это как поверхность бесконечного стола или идеальной стены и т. п. С точки зрения аксиоматической теории, плоскость — ещё одно неопределяемое понятие, которое можно лишь описать, перечислить некоторые его свойства. Любой из вас может придерживаться той точки зрения, которая ему больше нравится, или, даже лучше, придумать свою, основываясь на обеих этих позициях. Мы лишь скажем, что главным свойством плоскости является то, что *в каждой плоскости выполняются все утверждения планиметрии*.

Однако, чтобы успешно заниматься стереометрией, нам понадобятся ещё и свойства *самого пространства*.

Сформулируем два основных свойства трёхмерного пространства.

Первое основное свойство

Для любых трёх точек пространства, не лежащих на одной прямой, существует единственная содержащая их плоскость.

Второе основное свойство

Любая плоскость делит пространство на две части — два полупространства.

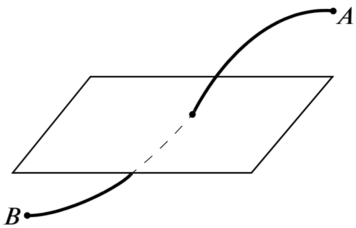


Рис. 8

Как и в случае плоскости, приводимые нами основные свойства пространства не представляют из себя полной системы аксиом. Например, в настоящей аксиоматической теории следовало бы потребовать, что существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Однако выполнение этого утверждения столь очевидно для каждого, что требовать его сейчас было бы излишним. Поэтому мы ограничились лишь самыми необходимыми аксиомами (основными свойствами), выбрав их так, чтобы их и наших наглядных представлений хватило для дальнейшей работы.

Поясним второе свойство. Здесь нетрудно увидеть полную аналогию с соответствующим свойством прямой на плоскости. Любая плоскость разбивает все точки пространства, не лежащие на самой плоскости, на две части, два *полупространства*. При этом если точка A лежит в одной части пространства, а точка B — в другой, то любая линия, соединяющая точки A и B, обязательно пересекает эту плоскость (рис. 8). Если же две точки расположены в одном полупространстве, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекает плоскость.

Из приведённых свойств можно сделать несколько важных выводов.

1. Если две точки принадлежат какой-то плоскости, то и вся прямая, проходящая через эти точки, принадлежит этой же плоскости.

2. Любая прямая и точка вне прямой определяют единственную плоскость. (Существует единственная плоскость, содержащая указанные прямую и точку. Эта плоскость определяется данной точкой и любыми двумя точками на прямой.)

3. Существует единственная плоскость, содержащая две заданные пересекающиеся прямые пространства. (Эту плоскость можно задать, например, точкой пересечения прямых и ещё двумя точками — по одной на каждой из прямых.)

Как известно, две плоскости в трёхмерном пространстве пересекаются по прямой. Исходя из сформулированных свойств пространства, это утверждение можно доказать. Сформулируем этот важный факт в виде теоремы.

Теорема 1.1 (*о пересечении двух плоскостей*)

Если две различные плоскости трёхмерного пространства имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Доказательство. Достаточно доказать, что если две различные плоскости имеют одну общую точку, то у них есть по крайней мере ещё одна общая точка. Тогда и вся прямая, проходящая через эти две точки, должна принадлежать обеим плоскостям. Из этого будет следовать утверждение теоремы.

Пусть A — общая точка двух плоскостей α и β (рис. 9). Проведём в плоскости β через A произвольную прямую и возьмём на ней точки K и M по разные стороны от A. Эти точки расположены в разных полупространствах, определяемых плоскостью α. Возьмём в плоскости β произвольную точку L, не лежащую на прямой KM. Из трёх точек K, M, L две лежат в одном полупространстве относительно плоскости α. Пусть это точки K и L. Тогда прямая ML пересекает плоскость α. Обозначим точку пересечения через B. Точки A и B принадлежат обеим плоскостям, значит, как было отмечено выше, плоскости α и β пересекаются по прямой, в данном случае это прямая AB. ▼

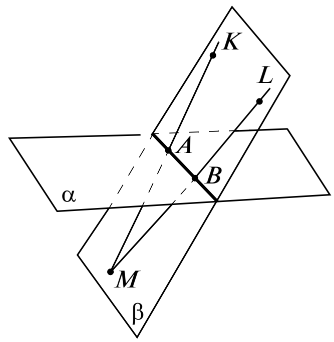


Рис. 9

Итак, доказан известный и очень важный факт: **две плоскости пересекаются по прямой линии**. Теперь мы можем решать некоторые простейшие задачи, в которых требуется построить сечение данного многогранника плоскостью, определённой тремя точками. Все построения выполняются на *изображении* многогранника. Хотя мы формально ещё не обсуждали, что такое многогранник, мы надеемся, даже уверены, что вы за свою жизнь неоднократно сталкивались на практике с самыми разными многогранными телами, так что вам знакомо, например, что такое куб и как он устроен. Представьте теперь, что куб (или любой другой многогранник, знакомый вам) разрезают на две части плоским разрезом. Тогда задача построения сечения состоит в том, что мы должны сообразить, как устроен этот разрез, где он проходит, что пересекает. (Позже мы ещё раз об этом поговорим в § 2.1, 2.2.) При этом мы будем использовать то, что **изображением прямой линии служит прямая линия**.

Начнём со следующей задачи.

Задача. *Построить сечение куба плоскостью, которая проходит через точки K, L, M, расположенные на его рёбрах, как показано на рисунке* 10, *а*.

Замечание. Точнее было бы вместо куба говорить о шестиграннике, все грани которого — четырёхугольники. Никакие другие свойства куба в процессе решения не потребуются.

Решение. Проведём прямую KL и отметим точки её пересечения с продолжениями соответствующих рёбер куба (рис. 10, *б*). Получим ещё две точки, лежащие в плоскости сечения и на продолжениях рёбер куба.

Проводя аналогичным образом прямые в плоскостях других граней куба (рис. 10, *в*, *г*), мы построим всё сечение. ▼

В этой задаче при построении сечения был использован метод, который иногда называют **методом «следов»**. Ведь прямые,

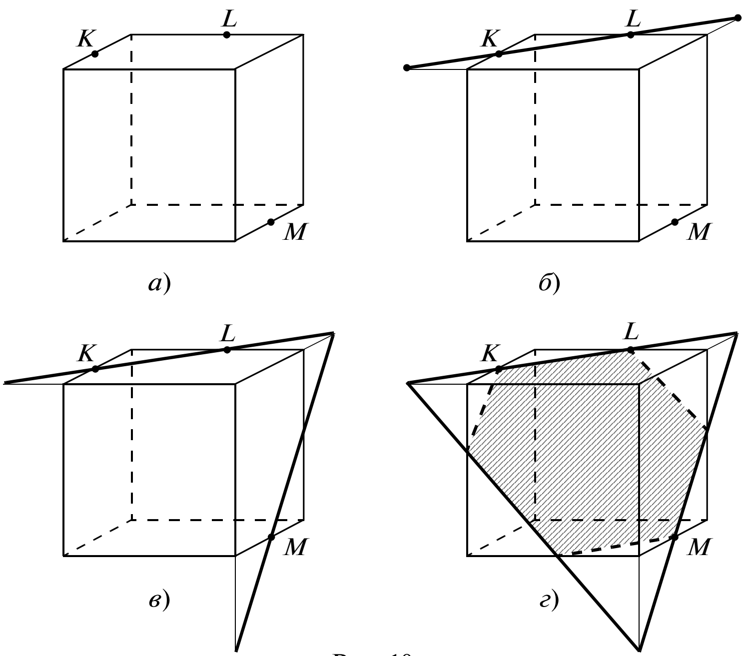


Рис. 10

по которым плоскость сечения пересекает плоскости граней, и точки её пересечения с прямыми, задающими рёбра многогранника, в некотором смысле «следы» плоскости сечения.

Задачи, задания, вопросы

1. Докажите, что три попарно пересекающиеся прямые в пространстве, не проходящие через одну точку, лежат в одной плоскости.

2. В пространстве выбраны четыре точки. Сколько может быть различных плоскостей, содержащих не менее трёх из данных точек (укажите все возможности)?

3 (в). Пусть A, B, C и D — четыре точки, которые лежат в одной плоскости, причём прямые AB и CD непараллельны, M — произвольная точка пространства, не принадлежащая данной плоскости. Докажите, что прямая, по которой пересекаются плоскости ABM и CDM, проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки M.

4 (т). В пространстве проведено несколько прямых. Любые две из них пересекаются, но при этом данные прямые не проходят через одну точку. Докажите, что эти прямые лежат в одной плоскости.

5. Ученик изобразил треугольную пирамиду и сечение в ней (рис. 11). Возможно ли такое сечение?

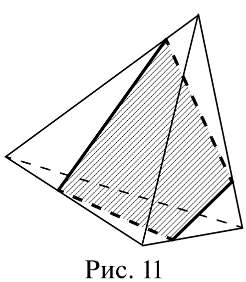
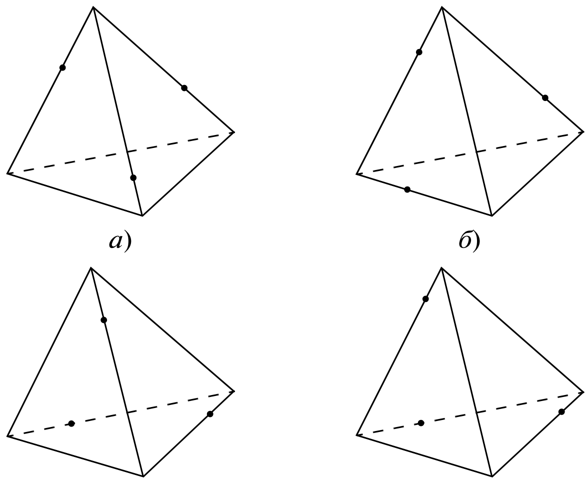


Рис. 11

6 (в). На рёбрах треугольной пирамиды взяты три точки, как показано на рисунке 12, *а*, *б*, *в*, *г*. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через три отмеченные точки.

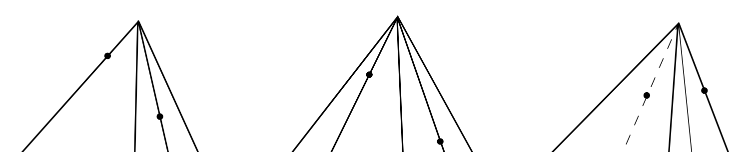


а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 12

Замечание. В этой и других аналогичных задачах все построения делаются на изображении многогранника (в данном случае пирамиды), при этом сначала изображение, данное в учебнике, перерисовывается в тетрадь. (Постарайтесь изображение в тетради сделать достаточно большим, удобным для работы.)

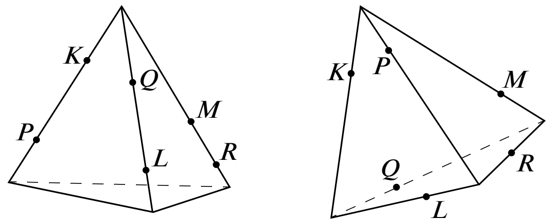
7. На поверхности треугольной пирамиды взяты три точки, как показано на рисунке 13, *а*, *б*, *в*. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через эти три точки.



а) *б*) *в*)

Рис. 13

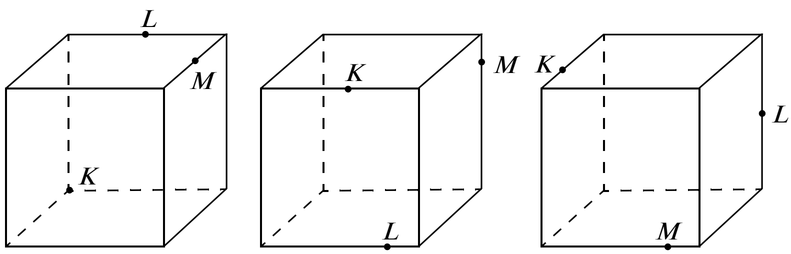
8. На рёбрах треугольной пирамиды взяты точки K, L, M, P, Q, R, как показано на рисунке 14, *а*, *б*. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскости KLM и PQR. (См. замечание к задаче 6.)



а) *б*)

Рис. 14

9 (в). На рёбрах куба взяты точки K, L и M так, как показано на рисунке 15, *а*, *б*, *в*. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки.



а) *б*) *в*)

Рис. 15

10 (т). На рёбрах AD и BC пирамиды $ABCD$ отмечены точки K и M (рис. 16). Постройте точку пересечения прямой KM с плоскостью, проходящей через точки A, B и середину DC.

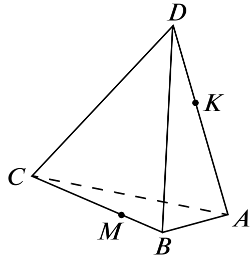


Рис. 16

1.2

1.2. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

С понятием «параллельность» вы познакомились при изучении планиметрии. Там оно относилось лишь к прямым. Выход в пространство, изменение «статуса» плоскости вынуждает нас не только уточнить определения некоторых понятий, но и расширить область их применения.

Определение 1

Две плоскости в пространстве называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Определение 2

Прямая и плоскость в пространстве называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Определение 3

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Как видим, первые два определения расширяют «зону действия» понятия «параллельность», а третье — уточняет старое определение. Ведь в пространстве две прямые могут и не принадлежать одной плоскости.

Определение 4

Две прямые, не принадлежащие одной плоскости, называются скрещивающимися.

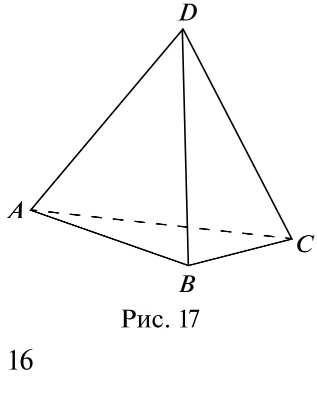


Рис. 17

На рисунке 17 изображена треугольная пирамида $ABCD$. Прямые AB и DC, AC и BD, AD и BC являются скрещивающимися, поскольку точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Таким образом, противоположные рёбра треугольной пирамиды попарно скрещиваются (т. е. они лежат на скрещивающихся прямых).

Сформулируем и докажем несколько теорем о свойствах и признаках параллельности в пространстве.