МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич

ГЕОМЕТРИЯ

10 класс

Учебник

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

8-е издание, стереотипное

Москва
ДРОФА
2020

российский учебник

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
П64

Одобрено Научно-редакционным советом корпорации «Российский учебник» под председательством академиков Российской академии наук В. А. Тишкова и В. А. Черешнева

Потоскуев, Е. В.

П64 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень : учебник / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. — 8-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2020. — 223, [1] с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-358-23293-8

Учебник по геометрии углублённого уровня для 10 класса включает теоретический материал по курсу стереометрии. Рассматриваются темы: прямые, плоскости, расстояния, векторный и координатный методы в пространстве. Высокие результаты усвоения материала обеспечиваются решением большого количества задач из задачника на построение (особенно сечений многогранников), доказательство и вычисление с использованием различных приёмов.

Учебник и задачник УМК Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича может быть использован для подготовки к дальнейшему изучению математики в высшей школе.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования, рекомендован Министерством просвещения РФ и включён в Федеральный перечень учебников.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-358-23293-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебный комплекс авторов Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Углублённый уровень. 10 класс» состоит из учебника, задачника, рабочей программы и методического пособия для учителя.

Основная часть учебника соответствует программе теоретического курса геометрии классов с углублённым изучением математики.

Помимо основного текста, содержащего обязательный теоретический материал курса геометрии 10 класса, в книге имеются:

• дополнительные материалы, в которых рассматриваются некоторые вопросы изображения фигур в параллельной проекции и построения сечений многогранников (они предназначены для более глубокого понимания материала и овладения продуктивными методами решения стереометрических задач; построение сечений развивает пространственное и конструктивно-логическое мышление);

• список основных теорем курса стереометрии 10 класса, в котором отражается структура последовательного построения курса (этот список будет также полезен при оформлении письменного решения задач в контрольных работах и при устных ответах на уроке и даёт представление о том, какие из приведённых в тексте учебника теорем авторы считают минимально необходимыми);

• список опорных задач на построение в пространстве, которые лежат в основе решения большинства задач стереометрии;

• формулы планиметрии, стереометрии и тригонометрии, которые в определённой степени являются справочными материалами;

• краткое содержание курса геометрии 11 класса и предметный указатель, который облегчает работу с учебником.

В процессе изложения основного курса стереометрии авторы часто предлагают некоторые дополнения. Знаки ... обозначают начало и окончание изложения дополнения.

Знаки ... обозначают начало и окончание текста, связанного с уже изученными в курсе геометрии вопросами, которые авторы считают необходимым ещё раз обсудить.

Символ «▼» означает окончание доказательства утверждения, а символ «■» — задачу из задачника.

В конце каждой главы предлагаются задания для работы с интернет-ресурсами.

Наглядные представления о пространстве и пространственных фигурах в той или иной мере имеет каждый выпускник 9 класса, приобретая и вырабатывая их в процессе учебной и практической деятельности. Некоторые из выпускников основной школы изучали геометрию по учебникам, в которых излагались вопросы стереометрии, и поэтому их представления о стереометрии уже довольно-таки широки. Эти знания облегчат изучение стереометрии в старшей школе.

Такие понятия, как пространство, плоскость, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, а также куб, тетраэдр, параллелепипед, призма, шар и другие, на интуитивном уровне уже известны выпускникам 9 класса. Мы не ставили целью построения курса стереометрии на строго аксиоматической основе; с таким построением вы сможете познакомиться, прочитав соответствующий дополнительный материал в учебнике 11 класса.

Трудности, которые могут возникнуть буквально с первых уроков стереометрии, связаны не столько с абстрактным характером материала, сколько с отличиями между плоскими и пространственными фигурами, между их изображениями. Чтобы усвоение материала строилось не на заучивании, а приобретённые знания не были формальными, целесообразно с самого начала изучение теоретического материала сопровождать построениями изображений пространственных фигур и соответствующими последующими построениями на этих изображениях. Стоит также внимательнее изучать и даже воспроизводить стереометрические рисунки. Таких рисунков в книге несколько сотен, часть из них дана в динамике развития построения. Стоит изучать и модели пространственных фигур, а несколько таких моделей полезно изготовить самому. Опыт показывает, что время, затраченное на решение задач такого рода, окупается при изучении последующих разделов стереометрии: аксиомы и теоремы усваиваются сознательно, а следовательно, сохраняются в памяти.

В учебнике многие вопросы начал стереометрии иллюстрируются с помощью изображений куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды. И хотя многогранники будут подробно изучаться в 11 классе, такое опережающее знакомство с «устройством» упомянутых многогранников позволяет увереннее и успешнее «входить в стереометрию», «видеть» параллельные и перпендикулярные прямые и плоскости, обнаруживая при этом определённую аналогию между тетраэдром и треугольником, кубом и квадратом, а также и существенные их различия.

Построение сечений многогранников является одним из опорных разделов в изучении стереометрии. Эти сечения строятся сначала на основании аксиом и следствий из них, а затем, в дополнительных материалах, — с применением всё новых и новых теорем и приёмов. Построение сечений многогранников делает предмет стереометрии наглядным, доступным и интересным, формирует конструктивные пространственные представления.

Большое внимание в учебнике уделяется изучению элементов векторной алгебры и координатного метода в пространстве. Дело в том, что векторный и координатный, а также векторно-координатный методы могут быть успешно использованы при решении широкого круга содержательных геометрических задач на параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, нахождение углов и расстояний между ними, вычисление площадей поверхностей и объёмов геометрических фигур. Следует заметить, что векторный метод решения задач иногда оказывается проще «элементарно-геометрического метода». Кроме того, методы векторной алгебры широко используются в вузах.

Активное и эффективное изучение стереометрии возможно лишь при условии решения достаточно большого числа задач различной степени сложности. Поэтому вторая часть комплекса представляет собой задачник, содержащий более

1000 задач, соответствующих изложению теоретического курса. Главы и параграфы задачника имеют ту же нумерацию и те же названия, что и в учебнике. При этом набор задач каждого параграфа задачника согласуется с теоретическим материалом такого же параграфа учебника. В конце каждой главы учебника предложены дополнительные задания для работы с интернет-ресурсами (по главе 3 эти задания размещены в конце списка интернет-ресурсов на с. 220).

Требования к результатам обучения и освоению содержания программы и примерное тематическое планирование представлены в учебно-методическом пособии Е. В. Потоскуева «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Углублённый уровень. 10—11 классы. Рабочая программа к линии учебников Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича».

Авторские рекомендации по обучению стереометрии в 10 и 11 классах приводятся в методических пособиях соответственно для 10 и 11 классов.

Авторы выражают благодарность рецензентам учебника Ирине Михайловне Смирновой, доктору педагогических наук, профессору; Борису Петровичу Пигареву, кандидату педагогических наук, заслуженному учителю России; Илье Евгеньевичу Феоктистову, учителю школы № 1741 г. Москвы, а также Потоскуевой Тамаре Николаевне, учителю математики, за внимательное прочтение рукописи и сделанные ценные конструктивные замечания и предложения.

Авторы будут благодарны за все замечания, присланные на сайт издательства www.drofa.ru.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Геометрические фигуры

$A, B, C, \ldots, M, P, Q$ — точки;

$a, b, c, \ldots, m, p, q$ — прямые;

AB — прямая, проходящая через точки A и B;

α, β, γ — плоскости;

(ABC) — плоскость, проходящая через точки A, B и C (т. е. плоскость ABC);

$(a; A)$ — плоскость, проходящая через прямую a и точку A;

$A(BC)D$ — двугранный угол с ребром BC и гранями ABC и DBC;

$\alpha a \beta$ — двугранный угол с ребром a и гранями α и β;

$\angle(a, b)$ — угол между прямыми a и b;

$\angle(a, \alpha)$ — угол между прямой a и плоскостью α;

$\angle(\alpha, \beta)$ — угол между плоскостями α и β.

Отношения между геометрическими фигурами

$=$ — равенство;

$\backsim$ — подобие;

$\parallel$ — параллельность;

$\perp$ — перпендикулярность;

$\in$ — принадлежность элемента множеству;

$\subset$ — включение одного множества в другое;

$\cap$ — пересечение множеств;

$\cup$ — объединение множеств.

Например:

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$;

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ — треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$;

$a \parallel \alpha$ — прямая a параллельна плоскости α;

$a \perp \alpha$ — прямая a перпендикулярна плоскости α;

$A \in \alpha$ — точка A принадлежит плоскости α или плоскость α проходит через точку A;

$a \subset \alpha$ — прямая a лежит в плоскости α или плоскость α проходит через прямую a;

$A \notin \alpha$ — точка A не принадлежит плоскости α или плоскость α не проходит через точку A;

$a \not\subset \alpha$ — прямая a не лежит в плоскости α или плоскость α не проходит через прямую a;

$a \cap \alpha = A$ — прямая a пересекает плоскость α в точке A или плоскость α пересекает прямую a в точке A.

Величины

AB, $|AB|$, $\rho(A;\ B)$ — длина отрезка AB или расстояние между точками A и B;

$\rho(\Phi_1; \Phi_2)$ — расстояние между фигурами Φ_1 и Φ_2;

$\widehat{A(BC)D}$ — величина двугранного угла;

$(\widehat{a; b})$ — величина угла между прямыми a и b;

$(\widehat{a; \alpha})$ — величина угла между прямой a и плоскостью α;

$(\widehat{\alpha; \beta})$ — величина угла между плоскостями α и β.

Прочие символы

$\Rightarrow$ — знак следования; заменяет слова «следовательно», «поэтому» и т. п.;

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности; заменяет слова «тогда и только тогда», «равносильно» и т. п.;

Пр. $_{\vec{b}}\vec{a}$ — проекция вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$;

п. 9.2 — пункт 9.2;

т. 3 — теорема 3.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

§ 1. Предмет стереометрии. Основные понятия

Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости (плоских фигур), называется *планиметрией*. Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве (пространственных фигур), называется *стереометрией*.

Слово *«стереометрия»* состоит из греческих слов *«стереос»* — телесный, пространственный и *«метрео»* — измеряю.

При изучении математики вы уже встречались с основными понятиями стереометрии: точками, прямыми и плоскостями, а также расстояниями. На интуитивном уровне вы, скорее всего, уже говорили:

- о принадлежности точки прямой или плоскости;
- о взаимном расположении прямых в пространстве (параллельны, пересекаются или скрещиваются);
- о взаимном расположении прямой и плоскости (прямая лежит в плоскости, пересекает её или ей параллельна);
- о взаимном расположении двух плоскостей (плоскости пересекаются или параллельны).

Всюду в дальнейшем выражения «две точки», «две прямые», «две плоскости» следует понимать соответственно так: две различные точки, две различные прямые, две различные плоскости.

При изучении стереометрии вы будете пользоваться рисунками, которые помогут понять, представить, проиллюстрировать содержание того или иного факта, суть понятия, представить то, о чём идёт речь в задаче или теореме.

Более того, интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — это ключ к изучению стереометрии. Поэтому прежде, чем понять сущность аксиомы, определения, доказательства теоремы, решения геометрической задачи, постарайтесь представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идёт речь. «Мой карандаш бывает ещё остроумней моей головы», — признавался великий математик Леонард Эйлер (1707—1783).

Однако при строгом подходе к изучению геометрии рисунок не имеет доказательной силы, даже если он выполнен безупречно. И тем не менее, верно, наглядно и хорошо выполненный рисунок к задаче — это надёжный помощник при её решении.

В научной литературе доказательство должно основываться лишь на логических умозаключениях. В школьном же курсе геометрии из-за громоздкости ряда рассуждений, многообразия частных случаев при доказательствах теорем, с одной стороны, и ограниченности времени, с другой стороны, порой приходится жертвовать логической строгостью, прибегая к наглядности, что является вполне допустимым и разумным.

§ 2. О некоторых пространственных фигурах

Хотя изучение пространственных фигур вам ещё предстоит, мы будем использовать отдельные виды многогранников при рассмотрении ряда вопросов стереометрии.

Напомним некоторые сведения о многогранниках и дадим каждому многограннику наглядное описание.

Многогранник представляет собой тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников, которые называют *гранями многогранника*. Стороны и вершины многоугольников называют соответственно *рёбрами* и *вершинами многогранника*. Каждое ребро принадлежит двум соседним граням. Для изображения многогранника достаточно изобразить его рёбра. При этом все его рёбра делятся на видимые (они изображаются сплошными линиями) и невидимые (они изображаются штриховыми линиями). Многогранники могут быть *выпуклыми* (рис. 1) и *невыпук-*

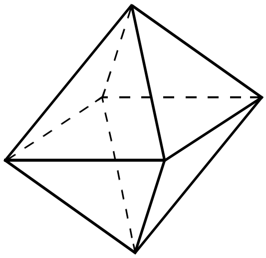

Рис. 1

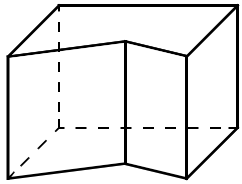

Рис. 2

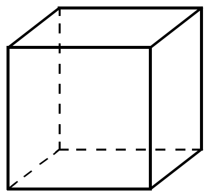

Рис. 3

лыми (рис. 2). **Выпуклый многогранник расположен по одну сторону относительно плоскости любой его грани.** (Мы будем изучать только выпуклые многогранники.)

Приведём примеры отдельных многогранников.

Куб представляет собой многогранник, у которого шесть граней, и все они — равные квадраты. У куба 12 равных рёбер и 8 вершин (рис. 3).

Параллелепипед представляет собой многогранник, у которого шесть граней, и каждая из них — параллелограмм. Параллелепипед может быть *прямым* (рис. 4) или *наклонным* (рис. 5).

Параллелепипед, все грани которого прямоугольники, называют *прямоугольным*. Прямоугольный параллелепипед изображается так же, как прямой. Из сказанного следует, что куб — это прямоугольный параллелепипед с равными рёбрами.

n-Угольная пирамида представляет собой многогранник, одна грань которого, называемая *основанием пирамиды*, — некоторый выпуклый n-угольник, а остальные n граней — треугольники с общей вершиной (рис. 6). Эта общая верши-

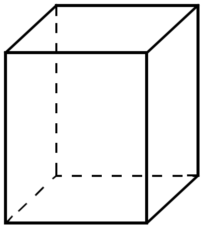

Рис. 4

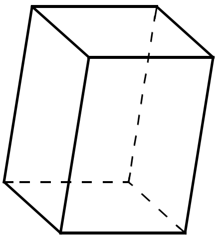

Рис. 5

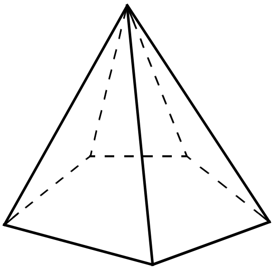

Рис. 6

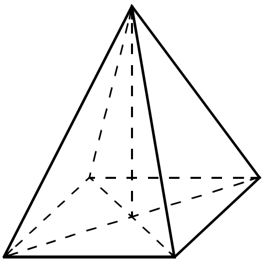

Рис. 7

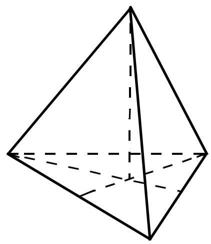

Рис. 8

на называется *вершиной пирамиды*, а треугольники — *боковыми гранями пирамиды*. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами её основания, называются *боковыми рёбрами пирамиды*. Пирамида, в основании которой лежит правильный n-угольник, а боковые рёбра равны между собой, называется *правильной пирамидой* (рис. 7). Пирамида, в основании которой лежит треугольник, называется *треугольной пирамидой* или *тетраэдром*. Таким образом, тетраэдр — это четырёхгранник. Все его четыре грани — треугольники. Тетраэдр, все четыре грани которого — равные правильные треугольники, называется *правильным тетраэдром* (рис. 8). Правильный тетраэдр — частный случай правильной треугольной пирамиды.

n-Угольная призма представляет собой многогранник, две грани которого, называемые *основаниями призмы*, — равные n-угольники, а все остальные n граней — параллелограммы. Они называются *боковыми гранями призмы*. Призма может быть *прямой* (рис. 9) или *наклонной* (рис. 10). У прямой призмы все боковые грани — прямоугольники, у наклонной призмы хотя бы одна грань — параллелограмм, не являющийся прямоугольником.

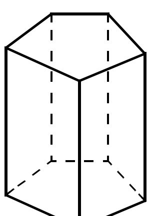

Рис. 9

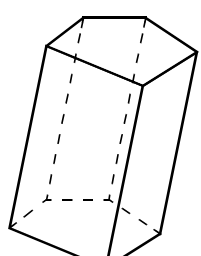

Рис. 10

Параллелепипед *— это призма, в основании которой лежит параллелограмм.*

Кроме многогранников мы будем изучать также свойства сферы, шара и других пространственных фигур.

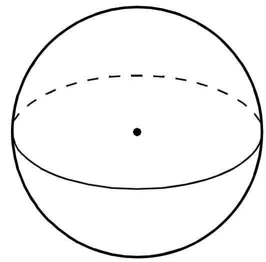

Рис. 11

Сферой называется множество всех точек пространства, удалённых от данной точки, называемой *центром сферы*, на одно и то же расстояние (рис. 11). Отрезок, соединяющий любую точку сферы с её центром, называется *радиусом сферы*. Радиусом сферы называют также расстояние от любой точки сферы до её центра. Для сферы, как и для окружности, определяются хорды и диаметр.

Шаром *называется множество всех точек пространства, расстояние от каждой из которых до данной точки —* ***центра шара*** *— не превосходит данного положительного числа, которое равно длине радиуса шара.*

Шар и куб — примеры геометрических тел, сфера и плоскость — примеры поверхностей.

§ 3. Аксиомы стереометрии

Слово *«аксиома»* греческого происхождения и в переводе означает истинное, исходное положение теории.

Из курса планиметрии известно, что ***плоскость*** *— это множество точек, в котором выполняется система аксиом планиметрии, описывающая свойства точек и прямых.*

Аналогично, ***пространство*** *— это множество точек, в котором выполняется система аксиом стереометрии, описывающая свойства точек, прямых и плоскостей.*

Система аксиом стереометрии даёт описание свойств пространства и основных его элементов. Понятия *«точка»*, *«прямая»*, *«плоскость»*, *«расстояние»* принимаются без определений: их описание и свойства содержатся в аксиомах. Аксиомы играют для них роль «неявных определений». С другой стороны, понятия *«точка»*, *«прямая»*, *«плоскость»* имеют наглядный смысл, отражённый на рисунках.

Данный курс стереометрии, разумеется, не основан на строгом аксиоматическом методе его изложения, однако знакомство со списком аксиом стереометрии необходимо. Не всеми из этих аксиом в явном виде и в равной мере вы будете пользоваться при изучении стереометрии, но особо хотим обратить ваше внимание на аксиомы R_1, R_2, R_3, R_4, R_5.

Подробнее о логическом построении различных геометрий речь пойдёт в 11 классе.

Изучение пространства приводит к необходимости расширения системы аксиом планиметрии. Система аксиом стереометрии, таким образом, состоит из всех аксиом планиметрии и новой группы аксиом, в которых выражены свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве.

Аксиома R_1. В пространстве существуют плоскости. В каждой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.

Эта аксиома даёт право рассматривать в любой плоскости пространства отрезки, прямые, треугольники, многоугольники, окружности и другие плоские фигуры со всеми их свойствами, которые изучались в планиметрии. Например, если прямая a и не принадлежащая ей точка M лежат в некоторой плоскости α, то в этой плоскости можно провести через точку M прямую, параллельную прямой a, и притом только одну.

! **Обратите внимание.** В планиметрии иллюстрация решения этой задачи состояла в построении данных прямой a, точки M и искомой прямой m ($M \in m$, $m \parallel a$) (рис. 12).

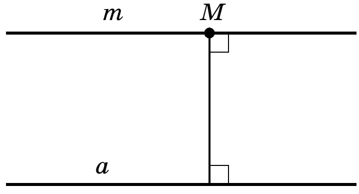

Рис. 12

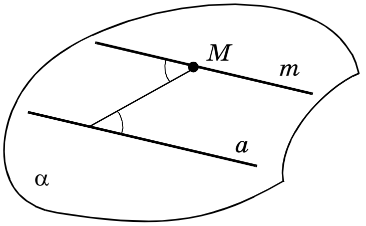

Рис. 13

В стереометрии иллюстрацию решения упомянутой задачи необходимо начинать с изображения данной плоскости α (рис. 13). Затем в плоскости α проводим данную прямую a. Отмечаем данную точку $M \notin a$ и строим искомую прямую m: $M \in m$, $m \parallel a$.

Аксиома R_2 (*аксиома плоскости*). Через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

На рисунке 14 проиллюстрировано содержание аксиомы R_2: плоскость α проходит через точки A, B, C — концы трёх стержней, не принадлежащие одной прямой, а плоскость β проходит через другие концы M, K и P этих стержней, также не принадлежащие одной прямой.

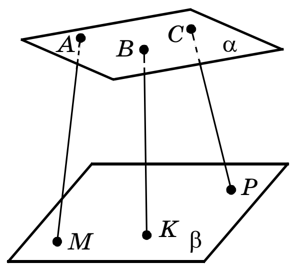

Рис. 14

Три точки, принадлежащие одной прямой, называются ***коллинеарными***, а *три точки, не принадлежащие одной прямой, —* ***неколлинеарными***. Так, три вершины треугольника неколлинеарны, а середины оснований трапеции и точка пересечения её диагоналей коллинеарны. Вообще, все точки одной прямой коллинеарны.

Плоскость, которая проходит через три точки A, B и C, не принадлежащие одной прямой ($C \notin AB$), обозначают символически (ABC); если этой плоскостью является плоскость α, то пишут $\alpha = (ABC)$ или $(ABC) = \alpha$. (В таком случае также говорят, что *три неколлинеарные точки в пространстве определяют плоскость*.)

Стол, имеющий три ножки, не может качаться на плоском полу. Его устойчивость объясняется тем, что концы трёх его ножек (три точки) принадлежат одной плоскости — плоскости пола, но не принадлежат одной прямой. Плохо сделанный стол на четырёх ножках качается на плоском полу, и под одну из его ножек что-нибудь стараются подложить.

Через любые две точки A и B в пространстве можно провести плоскость α. По аксиоме R_1 в этой плоскости выполняются все аксиомы планиметрии. Согласно одной из этих