УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
М91

Муравин, Г. К.

М91 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 кл. : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. — 6-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2020. — 318, [2] с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-358-23425-3

Учебник является частью УМК по математике для 10—11 классов, изучающих предмет на углубленном уровне. Теоретический материал разделен на обязательный и дополнительный, система заданий дифференцирована по уровню сложности, каждый пункт главы завершается контрольными вопросами и заданиями, а каждая глава — домашней контрольной работой. В учебник включены темы проектов и сделаны ссылки на интернет-ресурсы.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования, имеет гриф «Рекомендовано» и включен в Федеральный перечень.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-358-23425-3

Оглавление

Глава 6. Элементы теории вероятностей и статистики

Глава 7. Комплексные числа

Уважаемые старшеклассники!

В этом году вы завершаете изучение школьного курса математики. Авторы постарались помочь вам как в изучении нового материала, так и в повторении изученного ранее. Знать математику — это значит уметь решать задачи. Именно задачи вам предстоит решать на ЕГЭ. В учебнике задачи разной степени трудности.

В задачах, номера которых не имеют обозначений, вы не должны испытать затруднений. Значком «○» отмечены задания, в которых путь к ответу, как правило, связан с некоторыми техническими сложностями.

Задачи, над которыми следует подумать, имеют обозначение «●». План решения таких задач полезно обсудить в классе с учителем.

Символом «*» обозначены наиболее трудные задачи.

Значком «■» отмечены задания, которые следует выполнять с помощью калькулятора. В учебнике рассматривается калькулятор операционной системы Windows.

При изучении математики в 11 классе вам предстоит строить много графиков. В некоторых случаях работу в тетради полезно совмещать, а иногда и заменять работой на компьютере в одной из компьютерных программ построения и исследования графиков функций и уравнений. Такие программы свободно и бесплатно распространяются в Интернете. Мы рекомендуем две русифицированные программы GeoGebra и WinPlot. Выполненные в этих программах решения задач красивы и наглядны. Многие из них размещены школьниками и учителями математики в Интернете, где их можно посмотреть. Надеемся, что и ваши решения можно будет там увидеть.

В тексте учебника рекомендация использовать какую-нибудь компьютерную программу обозначается символом .

Вместе с основным материалом, изучение которого обязательно, в учебнике есть и дополнительный материал, знакомство с которым желательно. Начало дополнительного материала обозначается «▼», а конец — «△».

В разделе «Основные формулы» в конце учебника вы можете найти нужную формулу.

Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике.

Если выполнить задание вы не можете, то прочитайте совет к задаче или посмотрите её решение. В этом вам помогут разделы «Ответы», «Советы» и «Решения».

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а к главам учебника предлагаются домашние контрольные работы с указанием примерного времени, на которое рассчитано их выполнение.

Задания домашних контрольных работ разбиты на три уровня, которые соответствуют удовлетворительной, хорошей и отличной оценке, так что вы сами сможете оценить свои математические достижения.

Если вы можете ответить на контрольные вопросы, справляетесь с контрольными заданиями и выполнили домашнюю контрольную работу, значит, материал вами усвоен.

В конце учебника имеется предметный указатель, особенно полезный при повторении.

В учебник не вошли многие важные и интересные математические вопросы, поэтому для тех, кто интересуется математикой, в справочном разделе учебника имеется список дополнительной литературы и интернет-ресурсов.

Авторы желают вам успехов!

Глава 1

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ

В первом пункте этой главы речь пойдёт о различии между описательно-интуитивными и строгими математическими определениями, во втором пункте вы познакомитесь с важнейшим математическим понятием предела функции, а в третьем пункте вычисление пределов позволит более точно строить графики функций.

1. Непрерывность функции

В 10 классе вы познакомились с терминами «непрерывность функции», «промежуток непрерывности функции» и «точка разрыва функции». На рисунке 1 изображён график *непрерывной функции* $y = x^2$.

Кусочно-заданная функция $y = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$ (рис. 2),

известная в математике как функция $y = \operatorname{sign} x$[1], имеет разрыв в точке $x = 0$.

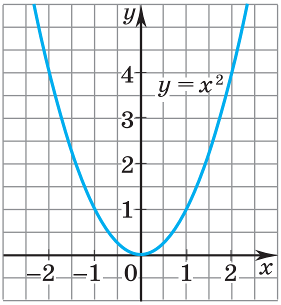

Рис. 1

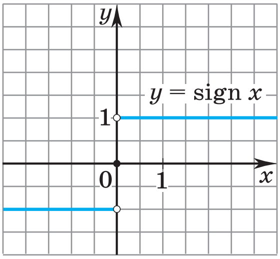

Рис. 2

[1] Функция сигнум (sign — сокращение латинского слова signum — знак) была введена немецким математиком, иностранным членом-корреспондентом Петербургской академии наук Л. Кронекером в 1878 г.

Первый из графиков можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги, а при изображении второго карандаш придётся оторвать. Именно на этом основывалось начальное представление о непрерывности функций, которым вы пользовались в 10 классе. Так, в частности, свойство сохранять знак, которым обладает непрерывная функция, которая не обращается в нуль на промежутке, позволяло решать неравенства методом интервалов.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{x^2-3x-4}{\log_2(2x+3)-3} \leqslant 0.$

Решение.

1 Найдём границы промежутков знакопостоянства функции, заданной левой частью неравенства. К этим границам относятся нули числителя, нуль знаменателя, и, конечно, сами промежутки должны входить в ОДЗ неравенства (область допустимых значений переменной x). ОДЗ: $\log_2(2x+3)-3 \neq 0$,

$$\begin{cases} 2x+3>0, \\ 2x+3\neq 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1{,}5, \\ x\neq 2{,}5. \end{cases}$$

Нули числителя: $x^2-3x-4=0$, $x_1=-1$, $x_2=4$.

Нуль знаменателя: $x=2{,}5$.

2 Отметим найденные границы с учётом нестрогости данного неравенства (рис. 3, *а*).

3 Определим знаки функции на отмеченных промежутках и проведём кривую знаков.

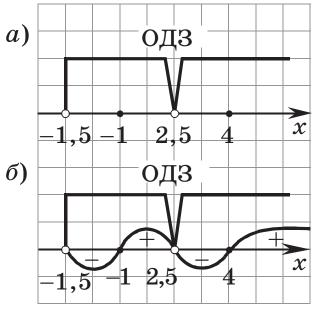

Рис. 3

На самом правом промежутке положителен и числитель, и знаменатель дроби, а при переходе через точки 4, 2,5 и –1 или числитель, или знаменатель свой знак изменяют, что влечёт изменение знака функции (рис. 3, *б*).

Ответ: $-1{,}5<x\leqslant -1$; $2{,}5<x\leqslant 4$.

Образных представлений о непрерывности было вполне достаточно для решения различных задач, пока речь шла об элементарных функциях[1]. Однако переход к более

[1] Напомним, что к ***элементарным*** относятся функции, задаваемые формулами, содержащими степени, радикалы, логарифмы, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, а также дроби и арифметические знаки действий.

сложным числовым функциям заставил математиков задуматься над проблемой строгости своей науки и, в частности, сформулировать определения на математическом языке. Так, как сформулировано, например, определение возрастающей функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей на множестве S***, если для любых двух чисел x_1 и x_2, принадлежащих этому множеству, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$.

В отличие от этого определения, основанного на простом сравнении чисел, говоря о непрерывности, мы оперируем неким описательным понятием *возможности изображения карандашом*. Однако здравый смысл подсказывает, что уже первый из упомянутых в этом пункте графиков, график функции $y = x^2$, изобразить карандашом нельзя, поскольку он бесконечен, а изображаем мы лишь его часть. Но если график вообще нельзя изобразить, то вопрос о том, как именно его нельзя изобразить, отрывая или не отрывая карандаш от бумаги, звучит несколько странно.

Обойти проблему бесконечности можно, рассматривая графики функций на небольших участках, т. е. в ближайших окрестностях точек графика.

В точке x_0 функция $y = f(x)$ может оказаться непрерывной (рис. 4) или иметь в ней разрыв (рис. 5).

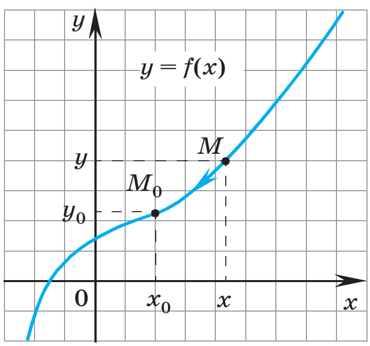

Рис. 4

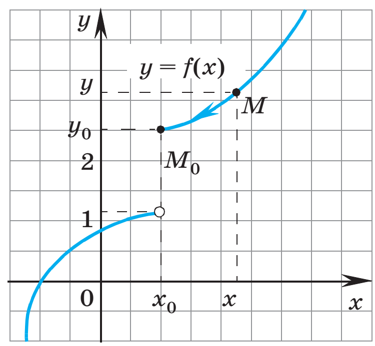

Рис. 5

На рисунке 4 точка $M(x; y)$, изображающая остриё грифеля карандаша, двигаясь по графику функции, *может* оказаться *как угодно близко* к точке $M_0(x_0; y_0)$. При этом всё меньше и меньше будут отличаться друг от друга как абсциссы точек M и M_0, так и их ординаты. Заметим, что абсциссы точек M и M_0 отличаются на $|x - x_0|$, а их ординаты на $|y - y_0|$ (модули здесь поставлены, чтобы учесть возможность приближения к точке M_0 с другой стороны, чем изображено на рисунке). Изменяя абсциссу точки M, мы можем так уменьшить значение $|x - x_0|$, что соответствующее значение $|y - y_0|$ станет как угодно малым, т. е. меньшим, чем любое заранее заданное положительное число. На этом и основывается строгое математическое определение непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$[1].

Это определение было предложено знаменитым французским математиком Огюстеном Луи Коши[2] в 20-е гг. XIX в.

Пример 2. Доказать, что функция $y = 2x + 3$ непрерывна в любой точке x_0.

Доказательство. Для произвольного положительного числа ε нам нужно найти такое число δ, чтобы из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следовало неравенство $|2x + 3 - (2x_0 + 3)| < \varepsilon$.

Преобразуем последнее неравенство:

$$|2x + 3 - (2x_0 + 3)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |2x - 2x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ при $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|2x + 3 - (2x_0 + 3)| < \varepsilon$, что и означает, согласно определению, непрерывность функции $y = 2x + 3$ в точке x_0.

---

[1] Знак следования «$\Rightarrow$» использован здесь в том же смысле, что и в 10 классе, когда шла речь о следовании и равносильности. А вообще, $A \Rightarrow B$ значит в точности то же, что и знакомая конструкция теорем: «Если верно утверждение A, то верно и утверждение B».

[2] О. Коши опубликовал это определение в 1823 г., однако на шесть лет раньше его сформулировал чешский математик Б. Больцано, чьи труды стали известны значительно позже работ Коши.

Примерно по такой же схеме доказывается факт непрерывности любой из элементарных функций в любой точке области её определения, который мы приняли без доказательства.

▼ **Пример 3.** Доказать непрерывность функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$.

Доказательство. Нужно найти, каким следует брать число δ, чтобы для любого x, такого, что $|x - 1| < \delta$, выполнялось неравенство $|x^2 - 1| < \varepsilon$.

$$|x^2 - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x-1)(x+1)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1||x+1| < \varepsilon.$$

Можно сразу ограничиться рассмотрением значений x из единичной окрестности точки $x_0 = 1$: $0 < x < 2$. Для любого из таких значений $|x + 1| < 3$. С учётом этого, для любого $\varepsilon > 0$, взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, получим:

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |x-1||x+1| < \delta|x+1| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x-1||x+1| < 3\delta \Leftrightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon. \ \triangle$$

Замечание. Определение непрерывности функции в точке неприменимо, когда речь идёт о границах отрезка, являющегося областью определения функции. Действительно, при $x < a$ и при $x > b$ (рис. 6) неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, где $D(f) = [a; b]$, теряет смысл, так как не определена сама функция $y = f(x)$.

В таких точках можно говорить только об односторонней непрерывности, убирая в определении непрерывности модуль из неравенства $|x - x_0| < \delta$. При этом соответствующая часть определения будет выглядеть так:

$0 \leqslant x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (непрерывность справа)

или так:

$0 \leqslant b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon$ (непрерывность слева).

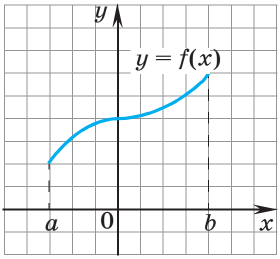

Рис. 6

С учётом сделанного замечания сформулируем определение непрерывной функции.

Функция, непрерывная во всех точках промежутка, является на этом промежутке ***непрерывной***.

На рисунке 5 легко видеть, что в точке x_0 функция не является непрерывной — как бы близко слева от этой точки ни брали x, разность $f(x) - f(x_0)$ останется больше некоторого положительного числа, большего 1.

Поскольку элементарные функции непрерывны на любом промежутке, входящем в область определения, они могут иметь разрывы только в точках, ограничивающих область определения. Вернёмся к рисунку 5, на котором график функции $y = f(x)$ имеет разрыв при $x = x_0$. Функция совершает скачок в точке x_0. Как бы близко слева от этой точки мы ни брали значение x, значение $|f(x_0) - f(x)|$ останется больше некоторого положительного числа. Это значит, что для точки x_0 не выполняется определение непрерывности функции.

На рисунках 7 и 8 показаны графики функций, имеющие разрыв в точке x_0, которая не входит в область определения. Однако при этом в некоторой окрестности слева и справа от точки x_0 функции определены.

Точку x_0, входящую в область определения функции, называют ***точкой разрыва функции***, если функция в ней не является непрерывной.
Точку x_0, не входящую в область определения функции, называют ***точкой разрыва функции***, если и слева, и справа от неё как угодно близко к точке x_0 есть точки, в которых функция определена.

На рисунке 7 хорошо вам известная гипербола $y = \dfrac{1}{x}$, а на рисунке 8 вы видите график функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, который при

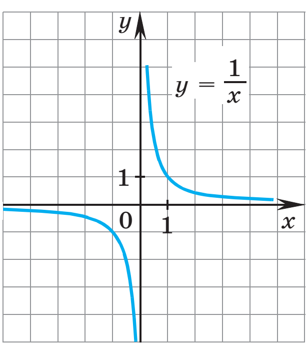

Рис. 7

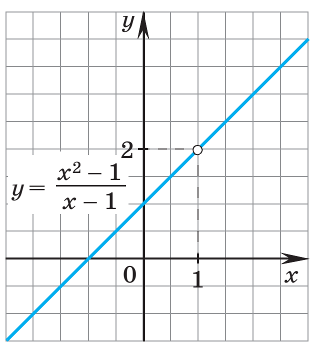

Рис. 8

всех x, кроме $x = 1$, совпадает с графиком линейной функции $y = x + 1$. В отличие от ***бесконечного разрыва*** функции $y = \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$, разрыв функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = 1$ называют ***устранимым***. Этот разрыв можно устранить, доопределив функцию y так: $y(1) = 2$.

Пример 4. Устранить разрыв функции

$$y = \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1}.$$

Р е ш е н и е. Данная функция имеет разрыв в точке $x = 1$. Устранить разрыв — это значит найти непрерывную функцию, которая совпадает с данной функцией во всех точках, кроме точки разрыва.

Преобразуем дробь, задающую функцию, рассматривая её числитель как квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{x}$:

$$\frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}.$$

Функция $y = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$ совпадает с функцией $y = \dfrac{x - 3\sqrt{x} + 2}{x - 1}$ при всех значениях аргумента, кроме $x = 1$, и является элементарной, а значит, непрерывной во всех точках своей области определения, в частности в точке $x = 1$.

О т в е т: $y = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$.

Упражнения

1. Среди указанных функций найдите функции, имеющие разрывы. Укажите точки разрыва:

1) $y = x^5 + x^3 + 7$;

2) $y = 5x + \dfrac{1}{x}$;

3) $y = \operatorname{tg} x$;

4) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ при } x < 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ 2x \text{ при } x > 0; \end{cases}$

5) $y = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2}$;

6) $y = 3^x + \lg x$;

7) $y = \dfrac{|x+5|}{2^x}$;

8) $y = \sin x - \cos^2 x$;

9) $y = \begin{cases} x + 2 \text{ при } x < -1, \\ x^2 \text{ при } -1 \leqslant x < 2, \\ 5 - x \text{ при } x \geqslant 2. \end{cases}$

2. 1) Сформулируйте условие, достаточное для того, чтобы непрерывная функция имела нуль на отрезке $[a; b]$.
2) Используйте это условие для составления плана поиска на отрезке $[4; 5]$ приближённого значения корня уравнения $x^3 - 2x^2 - 8x - 12 = 0$.

3) Действуя по составленному плану, найдите с помощью калькулятора корень с точностью до 0,01.

3. Решите методом интервалов неравенство:

1) $(x^2 - 4)(x^2 - 9) > 0$;

2) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{2x-1} < 0$;

3) $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{4 + 3x - x^2} > 0$;

4) $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{x+3} < 0$.

4. Приведите пример функции, непрерывной:
1) на множестве действительных чисел;
2) при всех значениях x, кроме $x = 4$;
3) при всех значениях x, кроме x, равных 1, 2 и 3.

5. В результате каких преобразований из графика функции $y = f(x)$ получится график функции:
1) $y = f(kx + b)$;
2) $y = kf(x) + b$;
3) $y = -f(x)$;
4) $y = |f(x + a)|$;
5) $y = f(|x|)$;
6) $y = |f(|x|)|$?

6. Постройте график функции:

1) $y = 2x^2 - 1$;

2) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = |2^x - 2|$;

4) $y = |2\cos x| + 1$;

5) $y = |\log_2 |x - 2||$;

6) $y = (|x| - 2)^2$.

7. На рисунке 9 изображены графики функций.
1) Какие из этих функций:
а) имеют разрывы;
б) имеют устранимые разрывы?

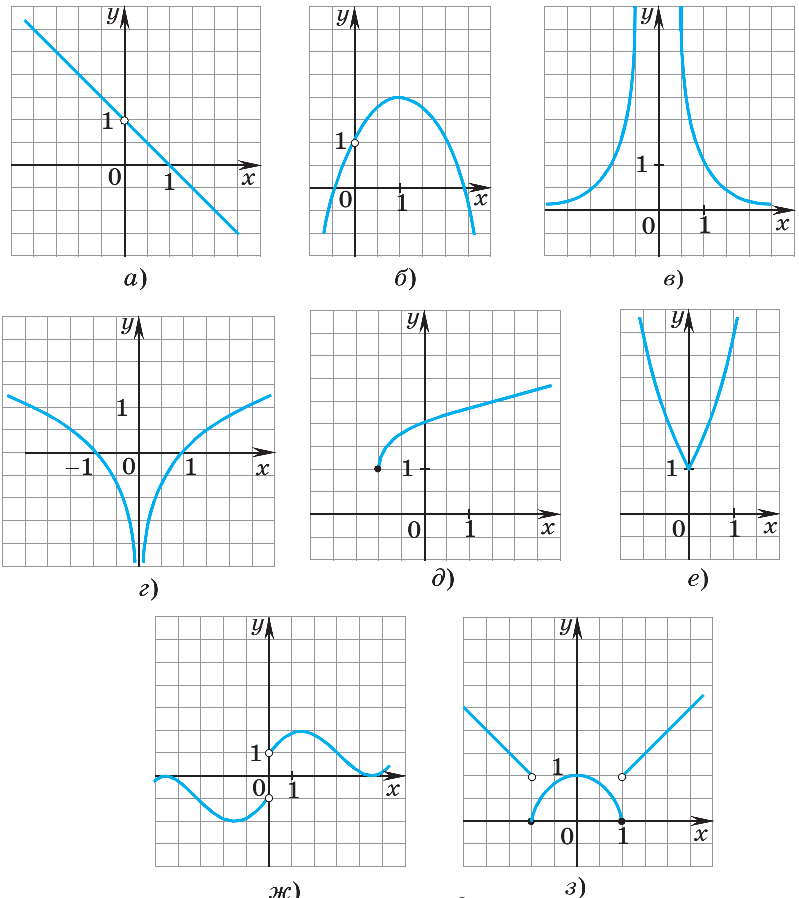

Рис. 9

2) Найдите для каждого графика соответствующую ему функцию из следующего списка:

$$y = \frac{x - x^2}{x},\ y = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ при } |x| \leqslant 1, \\ |x| \text{ при } |x| > 1, \end{cases}\ y = \frac{1}{x^2},\ y = 1 + \sqrt{x+1},$$

$$y = \log_2 |x|,\ y = \frac{x + 2x^2 - x^3}{x},\ y = (|x| + 1)^2,\ y = \sin x + \frac{|x|}{x}.$$

8. Вы знаете определение модуля: $|x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$

Есть ли отличия у функций $y = |x|$ и $y = x \cdot \operatorname{sign} x$? Можно ли задать функцию сигнум так: $\operatorname{sign} x = \frac{|x|}{x}$?

9. Как называют $|x - x_0|$, если x_0 — приближённое значение x?

10. Укажите самый широкий числовой интервал, все точки которого удовлетворяют неравенству:

1) $\left|x - \frac{3}{7}\right| < 0{,}01$;
2) $\left|x + \frac{5}{11}\right| < 0{,}001$;
3) $|x - 1| < \delta$;
4) $|x - x_0| < \delta$;
5) $|x - \pi| < 0{,}00001$.

11. Запишите в виде $|x - x_0| < \delta$ двойное неравенство:

1) $-1 < x < 1$;
2) $0 < x < 2$;
3) $-2 < x < 0$;
4) $1 < x < 3$;
5) $-2 < x < 1$;
6) $-5 < x < -1$.

12. Используя геометрическую интерпретацию модуля разности на координатной прямой, решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} |x - 2| < 0{,}6, \\ |x - 1| < 0{,}7; \end{cases}$
2) $\begin{cases} |x + 2| < 0{,}7, \\ |x + 1| < 0{,}6; \end{cases}$
3) $\begin{cases} |x - 2| > 0{,}6, \\ |x - 1| < 0{,}7; \end{cases}$
4) $\begin{cases} |x + 2| < 0{,}6, \\ |x + 1| > 0{,}7. \end{cases}$

13. Докажите, что линейная функция:

1) $y = 2 - 5x$;
2) $y = kx + l$

непрерывна в любой точке x_0.

14. Докажите, что функция $y = 3x + |x|$ непрерывна:

1) в точке $x_0 = 0$;
2) в любой точке x_0.

15. Докажите, используя определение непрерывности, что функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x = 0$.

16. Устраните разрыв функции:

1) $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2}{x^2}$;
2) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$;
3) $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{3 - x}$;
4) $y = \dfrac{(x^2 + x - 2)(x + 3)}{x^2 + 2x - 3}$;
5) $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$;
6) $y = \dfrac{64 - x^2}{2 - \sqrt[3]{x}}$.