

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
М52

Мерзляк, А. Г.

М52 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень : 10 класс : дидактические материалы : пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович, М. С. Якир. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 112 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-09769-3

Дидактические материалы содержат задания для самостоятельных и контрольных работ. Они используются в комплекте с учебником «Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10 класс» (авт. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский, М. С. Якир).

Пособие соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования.

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я72

ISBN 978-5-360-09769-3

© Мерзляк А. Г., Полонский В. Б.,
Рабинович Е. М., Якир М. С., 2020
© Издательский центр «Вентана-Граф»,
2020

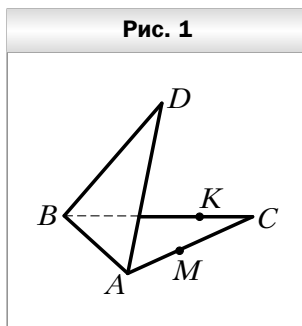
Упражнения

Вариант 1

Основные понятия стереометрии.

Аксиомы стереометрии

- Изобразите: плоскость α , проходящую через прямую m ; точку E , принадлежащую плоскости α и не принадлежащую прямой m ; точку M , не принадлежащую плоскости α ; прямую s , пересекающую плоскость α в точке E . Запишите с помощью соответствующих символов утверждение:
 - плоскость α проходит через прямую m ;
 - точка E принадлежит плоскости α ;
 - точка M не принадлежит плоскости α ;
 - прямая s пересекает плоскость α в точке E .
- Сколько плоскостей можно провести через точки A , B и C , если:
 - $AB = 13$ см, $BC = 17$ см, $AC = 24$ см;
 - $AB = 14$ см, $BC = 16$ см, $AC = 30$ см?
- Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости (рис. 1). На отрезке AC отметили точку M , а на отрезке BC — точку K так, что $AM : MC = CK : KB = 1 : 2$. Постройте:
 - линию пересечения плоскостей ABC и DMK ;
 - точку пересечения прямой MK с плоскостью ABD .
- Плоскости α и β пересекаются по прямой a . В плоскости β проведена прямая b , пересекающая плоскость α . Докажите, что точка пересечения прямой b и плоскости α принадлежит прямой a .
- Вершина A треугольника ABC принадлежит плоскости α , а вершины B и C ей не принадлежат. Продол-



- жения биссектрис BM и CK треугольника ABC пересекают плоскость α в точках E и F соответственно. Докажите, что точки A , M и K лежат на одной прямой.
6. Середины трёх сторон треугольника принадлежат плоскости α . Докажите, что вершины данного треугольника принадлежат плоскости α .

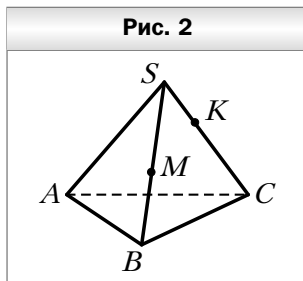
Следствия из аксиом стереометрии

7. Точка A принадлежит плоскости α . Докажите, что через точку A можно провести плоскость, отличную от плоскости α .
8. Ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O , лежит в плоскости α . Точка M не принадлежит плоскости α . Можно ли провести плоскость через прямую AM и точки O и C ?
9. Прямые a и b пересекаются в точке O . Докажите, что все прямые, которые пересекают прямую b и проходят через произвольную точку прямой a , отличную от точки O , лежат в одной плоскости.
10. Точки M и N лежат по одну сторону от плоскости β , а точки M и K — по разные стороны. Известно, что прямые MN , MK и NK пересекают плоскость β . Докажите, что точки их пересечения с плоскостью β лежат на одной прямой.

Пространственные фигуры.

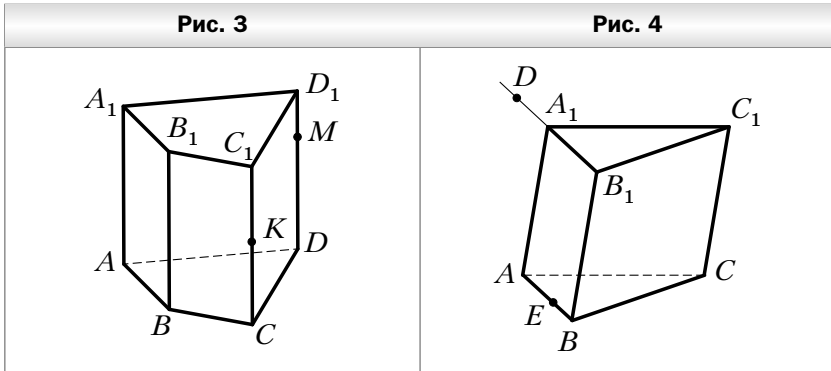
Начальные сведения о многогранниках

11. Точка M — середина ребра SA пирамиды $SABC$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки B , C и M .
12. На рёбрах SB и SC пирамиды $SABC$ отметили соответственно точки M и K (рис. 2). Постройте точку пересечения

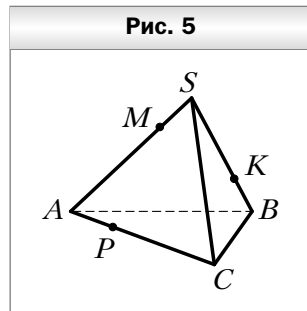


прямой MK с плоскостью ABC , если прямые MK и BC не параллельны.

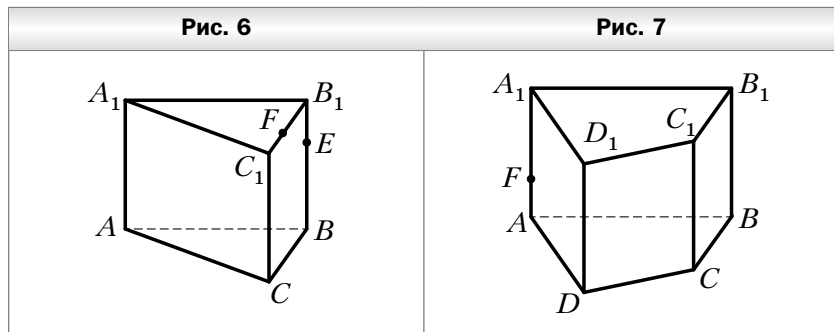
13. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки: 1) A_1 , C_1 и D ; 2) A , C и середину ребра BB_1 .
14. Дана призма $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3). Точка M принадлежит ребру DD_1 , точка K — ребру CC_1 . Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью $A_1B_1C_1$.
15. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 4). Точка D принадлежит прямой A_1B_1 , точка E — ребру AB . Постройте сечение призмы плоскостью CDE .



16. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ (рис. 5) плоскостью, проходящей через точки M , P и K , принадлежащие рёбрам SA , AC и SB соответственно.
17. Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 6) плоскостью, проходящей через точку A и точки E и F , которые лежат на рёбрах BB_1 и B_1C_1 соответственно.



18. Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7) плоскостью, проходящей через вершины C и D_1 и точку F ребра AA_1 .



**Взаимное расположение двух прямых
в пространстве**

19. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8).

Укажите его рёбра:

- 1) параллельные ребру AD ;
- 2) скрещивающиеся с ребром AD .

20. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD — скрещивающиеся.

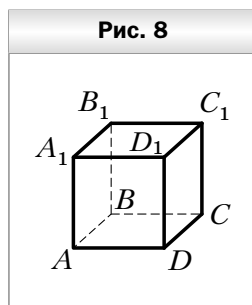
21. Прямые a и b параллельны, а прямая c пересекает каждую из них. Докажите, что прямые a, b и c лежат в одной плоскости.

22. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая a , не принадлежащая плоскости ABC , а через точку C — прямая b , параллельная прямой BD . Докажите, что прямые a и b — скрещивающиеся.

23. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α , а через точку B — прямая, пересекающая плоскость α в точке B_1 . Точка C принадлежит отрезку AB .

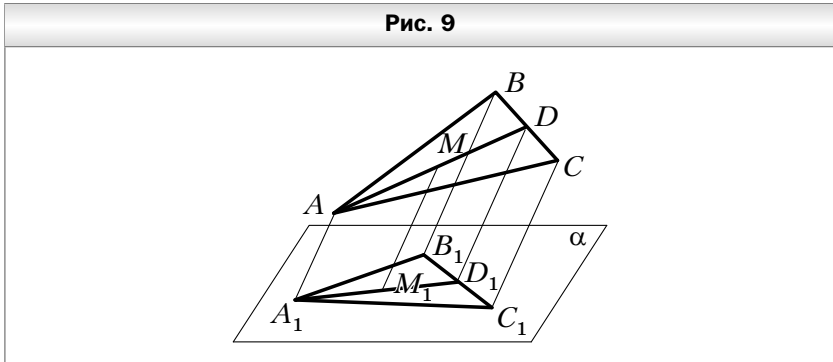
1) Постройте точку C_1 пересечения плоскости α с прямой, проходящей через точку C и параллельной прямой BB_1 .

2) Найдите отрезок BB_1 , если $AB = 10$ см, $AC : CC_1 = 2 : 5$.



24. На отрезке AB , который не пересекает плоскость α , отметили точку C . Через точки A , B и C провели параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно.
- 1) Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.
 - 2) Найдите отрезок B_1C_1 , если $AC = 7$ см, $BC = 21$ см, $A_1C_1 = 12$ см.
25. Треугольник ABC не имеет общих точек с плоскостью α . Отрезок AD — медиана треугольника ABC , точка M — середина отрезка AD (рис. 9). Через точки A , B , C , D и M провели параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 , B_1 , C_1 , D_1 и M_1 соответственно. Найдите отрезок CC_1 , если $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 8$ см, $MM_1 = 5$ см.

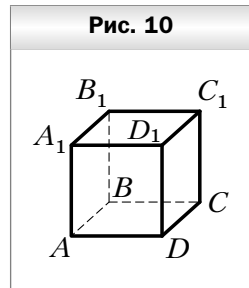
Рис. 9



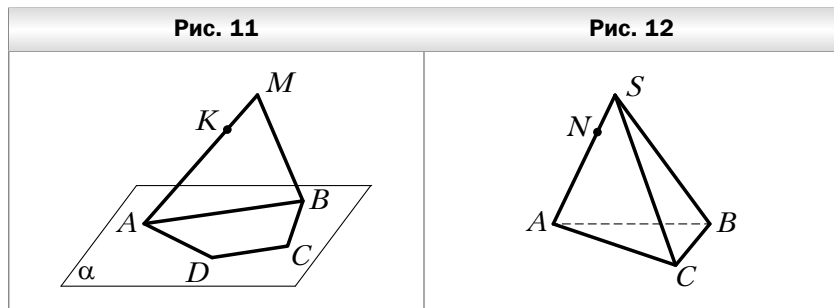
Параллельность прямой и плоскости

26. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 10). Плоскостям каких граней куба параллельна прямая CD ?
27. Точка A не принадлежит плоскости α . Сколько существует прямых, которые проходят через точку A и параллельны плоскости α ?
28. Точка M не принадлежит плоскости параллелограмма $ABCD$.

Рис. 10



- Докажите, что прямая AD параллельна плоскости MCB .
29. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC , точки M, N, P и K — середины отрезков AD, AB, BC и CD соответственно. Докажите, что $MK \parallel NP$.
 30. Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена плоскость, которая параллельна прямой AC и пересекает сторону BC в точке N . Докажите, что отрезок MN — средняя линия треугольника ABC .
 31. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках B_1 и C_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1C = 3 : 2$ и $B_1C_1 = 5$ см. Найдите отрезок BC , если прямая BC и плоскость α параллельны.
 32. Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) лежит в плоскости α , $AB = 8$ см. Вне плоскости α выбрали точку M и на отрезке AM отметили такую точку K , что $AK : KM = 3 : 1$ (рис. 11). Постройте точку F пересечения плоскости DKC и прямой MB и найдите отрезок KF .
 33. На ребре AC тетраэдра $SABC$ отметили точку D . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки S и D и параллельной прямой BC .
 34. Постройте сечение призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, которая проходит через точки M и K , принадлежащие соответственно рёбрам AB и $C_1 D_1$, и параллельна прямой CC_1 .
 35. Постройте сечение пирамиды $SABC$ (рис. 12) плоскостью, которая проходит через точку N на ребре SA и параллельна прямым AB и SC .



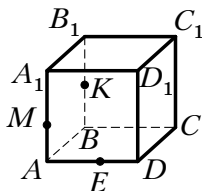
36. Постройте сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, которая проходит через точки D и E , принадлежащие соответственно рёбрам SA и SC , и параллельна прямой BC .
37. Постройте точку пересечения с плоскостью нижнего основания четырёхугольной призмы прямой, проходящей через две точки, одна из которых принадлежит боковому ребру призмы, а другая — боковой грани, которой это ребро не принадлежит.
38. Постройте точку пересечения с плоскостью нижнего основания треугольной призмы прямой, проходящей через две точки, принадлежащие двум разным боковым граням призмы.

Параллельность плоскостей

39. Стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ параллельны плоскости α . Докажите, что прямая AC параллельна плоскости α .
40. Плоскости α и β параллельны. В плоскости α выбраны точки M и N , а в плоскости β — точки M_1 и N_1 такие, что прямые MM_1 и NN_1 параллельны. Найдите отрезки NN_1 и M_1N_1 , если $MN = 5$ см, $MM_1 = 6$ см.
41. Плоскости α и β параллельны, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $D \in \beta$, $AC \parallel BD$, $CD = 3\sqrt{2}$ см, $BD = 4$ см, $\angle ABD = 135^\circ$. Найдите отрезок AD .
42. Медианы AM и CK треугольника ABC параллельны плоскости α . Через точки A и B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что четырёхугольник AA_1B_1B — параллелограмм.
43. Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α . Плоскость β , параллельная плоскости α , пересекает стороны AC и BC в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите отрезок A_1B_1 , если $A_1C = 9$ см, $AA_1 = 3$ см, $AB = 8$ см.
44. Плоскости α и β параллельны. Прямые a и b принадлежат плоскостям α и β соответственно. Через пря-

- мую a проведена плоскость, пересекающая плоскость β по прямой c , которая параллельна прямой b . Докажите, что $a \parallel b$.
45. Плоскости α и β параллельны. Через точку O , находящуюся между этими плоскостями, проведены две прямые. Одна из них пересекает плоскости α и β в точках A_1 и B_1 , а другая — в точках A_2 и B_2 соответственно. Найдите угол OA_1A_2 , если $\angle B_1OB_2 = 34^\circ$, $\angle OB_2B_1 = 78^\circ$.
46. Плоскости α и β параллельны. Из точки M , не принадлежащей этим плоскостям и не находящейся между ними, проведены два луча. Один из них пересекает плоскости α и β в точках A_1 и B_1 , а другой — в точках A_2 и B_2 соответственно, точка A_1 лежит между точками M и B_1 . Найдите отрезок MB_1 , если $MA_1 = 9$ см, $B_1B_2 = 4$ см, $A_1A_2 = A_1B_1$.
47. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точку M , принадлежащую ребру $A_1 B_1$, и прямую AC .
48. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 4 см. На отрезке AC отметили точку M так, что $AM : MC = 3 : 1$. Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через точку M и параллельна плоскости $BC_1 D$, и вычислите периметр сечения.
49. На ребре CD прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отметили точку M так, что $CM : MD = 2 : 3$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости $AB_1 C_1$. Найдите периметр построенного сечения, если $CD = 12,5$ см, $CC_1 = 30$ см, $AD = 17$ см.
50. На рёбрах AA_1 , BB_1 и AD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отметили соответственно точки M , K и E (рис. 13). Постройте сечение куба плоскостью MKE .

Рис. 13

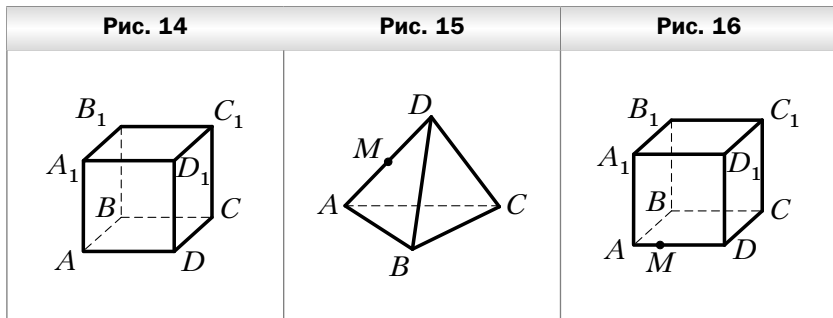


51. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, которая проходит через точки M , K и N , принадлежащие соответственно рёбрам AB , $B_1 C_1$ и CC_1 .

Преобразование фигур в пространстве.

Параллельное проектирование

52. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 14). При некотором параллельном переносе образом точки B является точка B_1 . Какая фигура при данном параллельном переносе является образом:
 1) точки C ; 2) отрезка AD ; 3) отрезка AC ?
53. На рисунке 15 изображён тетраэдр $DABC$, точка M — середина ребра AD . Постройте образ данного тетраэдра при параллельном переносе, в результате которого:
 1) образом точки A является точка C ;
 2) образом точки B является точка M .
54. На рисунке 16 изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, на ребре AD которого отметили точку M . Постройте образ данного куба при симметрии относительно: 1) вершины C ; 2) точки M .



55. Может ли быть параллельной проекцией параллелограмма четырёхугольник $A_1 B_1 C_1 D_1$, углы которого A_1 , B_1 , C_1 и D_1 соответственно равны 70° , 110° , 110° и 70° ?

56. В каком случае параллельной проекцией треугольника является:
- 1) отрезок;
 - 2) треугольник, равный данному треугольнику?
57. Треугольник $A_1B_1C_1$ является изображением равносоставленного треугольника ABC , точка M_1 — изображение некоторой точки M , принадлежащей треугольнику, но не лежащей на его сторонах (рис. 17). Постройте изображения перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AC и AB .
58. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — изображение ромба $ABCD$, в котором $BD = AB$. Постройте изображение высоты ромба, опущенной из вершины D на сторону AB .
59. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение равностороннего треугольника ABC . Постройте изображение ромба $ADEF$, если $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in AC$.
60. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — изображение квадрата $ABCD$. Постройте изображение прямоугольного равнобедренного треугольника ADE с гипотенузой AD , лежащего в плоскости ABC и расположенного вне квадрата $ABCD$.
61. Трапеция $A_1B_1C_1D_1$ — изображение трапеции $ABCD$, в которой $AB = BC = CD$, $BC < AD$. Постройте изображение центра окружности, касающейся боковых сторон и меньшего основания трапеции $ABCD$.
62. Точки A_1 , B_1 , C_1 — параллельные проекции точек A , B , C на плоскость α (рис. 18), прямая p_1 — проекция прямой p , лежащей в плоскости ABC , на плоскость α . Постройте прямую p .

