УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721.6
М52

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова,
доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.

М52 Математика. Алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень : 11 класс : учебное пособие / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков ; под ред. В. Е. Подольского. — М. : Вентана-Граф, 2019. — 412, [4] с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-10023-2

Учебное пособие предназначено для углублённого изучения геометрии в 11 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к математике.

Учебное пособие входит в систему «Алгоритм успеха».

Содержание учебного пособия соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721.6

ISBN 978-5-360-10023-2

От авторов

Дорогие одиннадцатиклассники!

В этом учебном году вы оканчиваете школу. Надеемся, что знания, которые вы получили, изучая математику по углублённой программе, станут для вас надёжной основой в овладении будущей профессией. Будем искренне рады, если важную роль в этом сыграет учебник, который вы держите в руках. Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Текст учебника разделён на пять глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным шрифтом**. Также обращайте внимание на слова, выделенные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

К данному учебнику создано приложение. Содержащийся в нём материал является продолжением главы 4 «Элементы теории вероятностей». Отметим, что в данной главе расширяются и уточняются понятия, рассмотренные в курсе алгебры. Для облегчения восприятия авторы посчитали целесообразным повторить ряд примеров из учебника «Алгебра. 9 класс»[1].

Школьный курс алгебры и начал анализа 11 класса содержит много важных и глубоких фактов. Некоторые из них в учебнике доказаны, часть приводится без доказательства. С их доказательством вы сможете ознакомиться, если изберёте профессию, связанную с математикой.

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите знать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный там, непрост. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успехов!

[1] Мерзляк А. Г., Поляков В. М. «Алгебра. 9 класс».

Условные обозначения

◆

Простые задачи

◆ ◆

Задачи средней сложности

◆ ◆ ◆

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи

5.1. Задания, рекомендуемые для устной работы

5.6. Задания, рекомендуемые для домашней работы глава

1 Показательная и логарифмическая функции

- В этой главе вы ознакомитесь с понятием степени с произвольным действительным показателем. Вы узнаете, какие функции называют показательной и логарифмической, изучите свойства этих функций, научитесь решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

§ 1 Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция

В 10 классе вы ознакомились с понятием степени положительного числа с рациональным показателем. Теперь мы выясним, что представляет собой степень положительного числа с действительным показателем.

Строгое определение степени с действительным показателем и доказательство её свойств выходит за пределы рассматриваемого курса. Текст этого параграфа содержит лишь общие пояснения того, как можно провести необходимые обоснования.

В курсе алгебры 9 класса вы ознакомились с понятием предела последовательности. Напомним основные моменты.

Рассмотрим последовательность (a_n), заданную формулой n-го члена. Например, $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Выпишем несколько первых членов этой последовательности:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \ldots .$$

Если члены этой последовательности изображать точками на координатной прямой, то эти точки будут располагаться всё ближе и ближе к точке с координатой 1 (рис. 1.1). Если рассмотреть произвольный промежуток $(1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$, содержащий число 1, то с некоторого момента все члены последовательности a_n попадут в него.

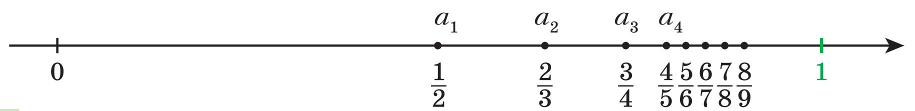

Рис. 1.1

В этом случае говорят, что число 1 является **пределом последовательности** a_n, и записывают $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ (здесь lim — это начальные буквы французского слова *limite* — предел). Также можно записать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Если число a является пределом последовательности (a_n), то говорят, что последовательность (a_n) **сходится** к числу a.

Разъяснение понятия степени положительного числа с действительным показателем начнём с частного случая. Выясним, что понимают под степенью числа 2 с показателем π.

Иррациональное число π можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби:

$$\pi = 3{,}1415\ldots .$$

Рассмотрим последовательность рациональных чисел

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots . \qquad (1)$$

Понятно, что эта последовательность сходится к числу π.

В соответствии с последовательностью (1) построим последовательность степеней с рациональными показателями:

$$2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ 2^{3,1415},\ \ldots . \qquad (2)$$

Можно показать, что члены последовательности (2) с увеличением номера стремятся к некоторому положительному числу. Это число и называют степенью числа 2 с показателем π и обозначают 2^π.

Если с достаточной точностью вычислить приближённые значения членов последовательности (2), например, воспользовавшись калькулятором, то можно получить последовательность чисел, являющихся приближёнными значениями числа 2^π. Имеем:

$$2^3 = 8,$$
$$2^{3,1} = 8{,}5\ldots,$$
$$2^{3,14} = 8{,}81\ldots,$$
$$2^{3,141} = 8{,}821\ldots,$$
$$2^{3,1415} = 8{,}8244\ldots,$$
$$\ldots$$

На самом деле, $2^\pi = 8{,}82497\ldots$.

Аналогично можно действовать в общем случае, определяя смысл выражения b^α, где $b > 0$, α — любое действительное число. Для числа α строят сходящуюся к нему последовательность рациональных чисел α_1, α_2, α_3, ... Далее рассматривают последовательность b^{α_1}, b^{α_2}, b^{α_3}, ... степеней с рациональными показателями (напомним, что степень положительного числа с рациональным показателем мы определили в курсе алгебры и начал математического анализа 10 класса). Можно доказать, что эта последовательность сходится к положительному числу c, которое не зависит от выбора сходящейся к α последовательности рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Число c называют **степенью положительного числа** b с действительным показателем α и обозначают b^α.

Если основание b равно единице, то $1^\alpha = 1$ для всех действительных α.

Если основание b равно нулю, то степень 0^α определяют только для $\alpha > 0$ и считают, что $0^\alpha = 0$. Например, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а выражение $0^{-\sqrt{3}}$ не имеет смысла.

При $b < 0$ выражение b^α, где α — иррациональное число, не имеет смысла.

Степень с действительным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с рациональным показателем.

В частности, для $x > 0$, $y > 0$ и любых действительных α и β справедливы такие равенства:

1) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;
2) $x^\alpha : x^\beta = x^{\alpha-\beta}$;
3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
4) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$.

Пример 1. Упростите выражение $\dfrac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}} = \frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}+1)a^{\sqrt{7}}}{(a^{3\sqrt{7}}+1)a^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1} = 1. \blacksquare$$

Выберем некоторое положительное число a, отличное от 1. Каждому действительному числу x можно поставить в соответствие положительное число a^x. Тем самым задана функция $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, с областью определения $\boldsymbol{R}$.

Эту функцию называют **показательной функцией**.

Изучим некоторые свойства показательной функции.

При $a > 0$ и любом x выполняется неравенство $a^x > 0$. Поэтому область значений показательной функции состоит только из положительных чисел.

Можно показать, что для данного числа a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, и для любого положительного числа b существует такое число x, что выполняется равенство $a^x = b$.

↳ Сказанное означает, что *областью значений показательной функции является множество* $(0; +\infty)$.

↳ *Показательная функция не имеет нулей, и промежуток* $(-\infty; +\infty)$ *является её промежутком знакопостоянства.*

↳ *Показательная функция непрерывна.*

↳ Покажем, что *при* $a > 1$ *показательная функция является возрастающей*. Для этого воспользуемся леммой.

Лемма

Если $a > 1$ и $x > 0$, то $a^x > 1$; если $0 < a < 1$ и $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.

Например, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_2 > x_1$, и функцию $f(x) = a^x$, где $a > 1$.

Поскольку $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тогда согласно лемме имеем: $a^{x_2 - x_1} > 1$, т. е. $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$. Так как $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$. Отсюда $f(x_2) > f(x_1)$.

Мы показали, что из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Это означает, что функция f является возрастающей при $a > 1$.

↳ Аналогично можно показать, что *при* $0 < a < 1$ *показательная функция является убывающей*.

↳ Поскольку показательная функция является либо возрастающей (при $a > 1$), либо убывающей (при $0 < a < 1$), то она *не имеет точек экстремума*.

↳ *Показательная функция является дифференцируемой*. Подробнее о производной показательной функции вы узнаете в § 8.

На рисунках 1.2 и 1.3 схематически изображён график показательной функции для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$ соответственно.

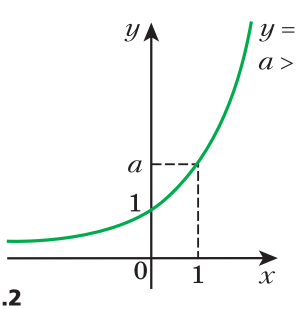

Рис. 1.2

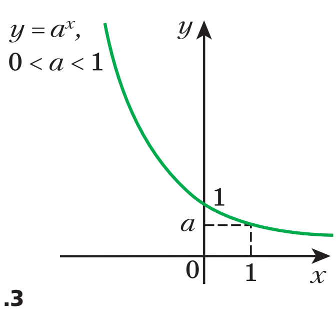

Рис. 1.3

В частности, на рисунках 1.4 и 1.5 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

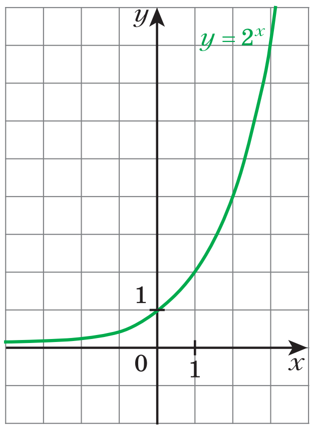

Рис. **1.4**

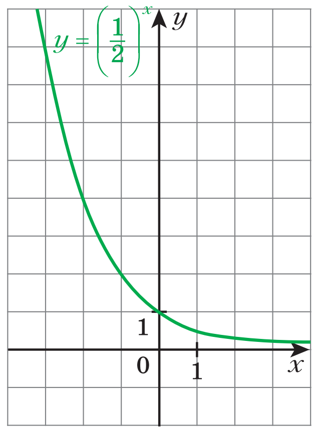

Рис. **1.5**

Заметим, что при $a > 1$ график показательной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогично при $0 < a < 1$ график показательной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

Показательная функция является математической моделью целого ряда процессов, происходящих в природе и в деятельности человека.

Например, биологам известно, что колония бактерий в определённых условиях за равные промежутки времени увеличивает свою массу в одно и то же количество раз.

Это означает, что если, например, в момент времени $t = 0$ масса была равной 1, а в момент времени $t = 1$ масса была равной a, то в моменты времени $t = 2$, $t = 3$, ..., $t = n$, ... масса будет равной соответственно a^2, a^3, ..., a^n, ... Поэтому естественно считать, что в любой момент времени t масса будет равной a^t. Можно проверить (сделайте это самостоятельно), что значения функции $f(t) = a^t$ увеличиваются в одно и то же количество раз за равные промежутки времени.

Таким образом, рассмотренный процесс описывают с помощью показательной функции $f(t) = a^t$.

Из курса физики известно, что при радиоактивном распаде масса радиоактивного вещества за равные промежутки времени уменьшается в одно и то же количество раз.

Если поместить деньги в банк под определённый процент, то каждый год количество денег на счёте будет увеличиваться в одно и то же количество раз.

Поэтому показательная функция описывает и эти процессы.

В таблице приведены свойства функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, изученные в этом параграфе.

Область определения	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$(0; +\infty)$
Нули функции	—
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на $\boldsymbol{R}$
Возрастание/убывание	Если $a > 1$, то функция возрастающая; если $0 < a < 1$, то функция убывающая
Непрерывность	Непрерывная
Дифференцируемость	Дифференцируемая
Асимптоты	Если $a > 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; если $0 < a < 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

Пример 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 3^x$ на отрезке $[-4; 3]$.

Решение. Так как функция f возрастает на отрезке $[-4; 3]$, то наименьшее значение она принимает при $x = -4$, а наибольшее — при $x = 3$. Следовательно,

$$\min_{[-4;\,3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$

$$\max_{[-4;\,3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Ответ: $\frac{1}{81}$; 27. ■

Пример 3. Решите уравнение $(\sqrt{2} - 1)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

Решение. Так как $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, а $|x| \geqslant 0$, то $(\sqrt{2} - 1)^{|x|} \leqslant (\sqrt{2} - 1)^0 = 1$. В то же время $\sin^2 x + 1 \geqslant 1$. Таким образом, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)^{|x|} = 1, \\ \sin^2 x + 1 = 1. \end{cases}$$

Отсюда $x = 0$.

Ответ: 0. ■

1. Опишите, как можно ввести понятие степени с иррациональным показателем.
2. Перечислите свойства степени с действительным показателем.
3. Перечислите свойства показательной функции.

Упражнения

1.1. Вычислите значение выражения:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$;
3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;
2) $\left((3\sqrt[3]{7})^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;
4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.2. Найдите значение выражения:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left((\sqrt[5]{10})^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.3. Докажите, что:

1) $\frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{2}}$;
3) $\frac{12^{\sqrt{48}} \cdot 2^{4\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{108}} \cdot 6^{\sqrt{27}}} = 6^{\sqrt{3}}$.
2) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} = (16^{\sqrt{3}})^{-2}$;

1.4. Сравните с числом 1 степень:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 3) $0{,}6^{2\sqrt{5}}$; 5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\pi}$;
2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$; 6) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

1.5. Какие из данных чисел больше 1, а какие меньше 1:

1) $1{,}8^{\sqrt{1{,}8}}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$; 3) $7^{-\sqrt{2}}$; 4) $0{,}3^{-\pi}$?

1.6. Какая из данных функций является показательной?

1) $y = x^6$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$; 3) $y = 6^x$; 4) $y = 6$?

1.7. На основании какого свойства показательной функции можно утверждать, что:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.8. Укажите, какие из данных функций являются возрастающими, а какие — убывающими:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1.9. Постройте график функции $y = 3^x$. В каких пределах изменяется значение функции, если x возрастает от -1 до 3 включительно?

1.10. Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. В каких пределах изменяется значение функции, если x возрастает от -2 до 2 включительно?

1.11. Сравните:

1) $5^{3,4}$ и $5^{3,26}$; 3) 1 и $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}$ и $(\sqrt{2})^{\sqrt{7}}$;

2) $0,3^{0,4}$ и $0,3^{0,3}$; 4) $0,17^{-3}$ и 1; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

1.12. Сравните с числом 1 значение выражения:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$;

2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

1.13. Сравните с числом 1 положительное число a, если:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$;

2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

1.14. Сравните числа m и n, если:

1) $0,8^m < 0,8^n$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

2) $3,2^m > 3,2^n$; 4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

◆◆

1.15. Упростите выражение:

1) $(a^{\sqrt{5}} + 2)(a^{\sqrt{5}} - 2) - (a^{\sqrt{5}} + 3)^2$; 3) $\frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}{(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})^2} + 1$;

2) $\frac{a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{3\sqrt{7}}}$; 4) $\frac{a^{\sqrt[3]{24}} - 1}{a^{\sqrt[3]{3}} - 1} - \frac{a^{\sqrt[3]{81}} + 1}{a^{\sqrt[3]{3}} + 1}$.

1.16. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(a^{2\sqrt{6}}-1)(a^{\sqrt{6}}+a^{2\sqrt{6}}+a^{3\sqrt{6}})}{a^{4\sqrt{6}}-a^{\sqrt{6}}}$; 2) $\left((a^{\pi}+b^{\pi})^2-(a^{\pi}-b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

1.17. Верно ли утверждение:

1) наибольшее значение функции $y=0{,}2^x$ на промежутке $[-1;\ 2]$ равно 5;

2) областью определения функции $y=4-7^x$ является множество действительных чисел;

3) областью значений функции $y=6^x+5$ является промежуток $[5;\ +\infty)$;

4) наименьшее значение функции $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ на промежутке $[-2;\ 2]$ равно 16?

1.18. Найдите область значений функции:

1) $y=-9^x$; 2) $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^x+1$; 3) $y=7^x-4$; 4) $y=6^{|x|}$.

1.19. Найдите наибольшее значение функции $y=\left(\dfrac{1}{6}\right)^x$ на промежутке $[-2;\ 3]$.

1.20. На каком промежутке наибольшее значение функции $y=2^x$ равно 16, а наименьшее — $\dfrac{1}{4}$?

1.21. На каком промежутке наибольшее значение функции $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ равно 27, а наименьшее — $\dfrac{1}{9}$?

1.22. Решите неравенство:

1) $2^x>-1$; 2) $2^{\sqrt{x}}>-2$.

1.23. Решите неравенство $2^{\frac{1}{x}}>0$.

1.24. Постройте график функции:

1) $y=2^x-1$; 3) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2$; 5) $y=-2^x$;

2) $y=2^{x-1}$; 4) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+2}$; 6) $y=5-2^x$.

1.25. Постройте график функции:

1) $y=3^x+1$; 3) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-2$; 5) $y=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$;

2) $y=3^{x+1}$; 4) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$; 6) $y=-3^x-1$.

1.26. График какой из функций, изображённых на рисунке 1.6, пересекает график функции $y = 5^x$ более чем в одной точке?

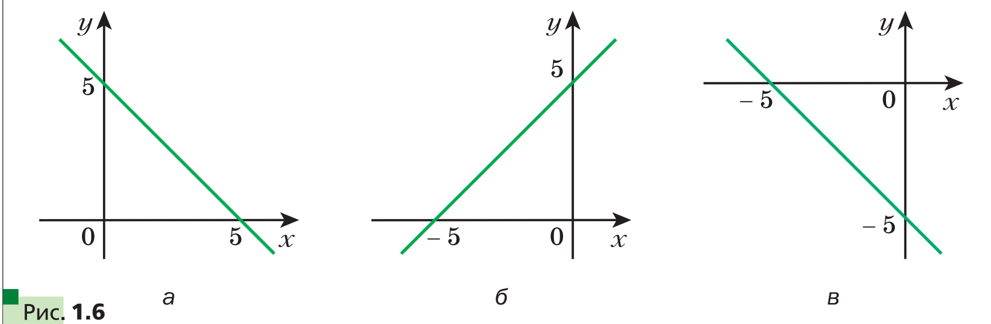

Рис. 1.6

1.27. На рисунке 1.7 укажите график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$.

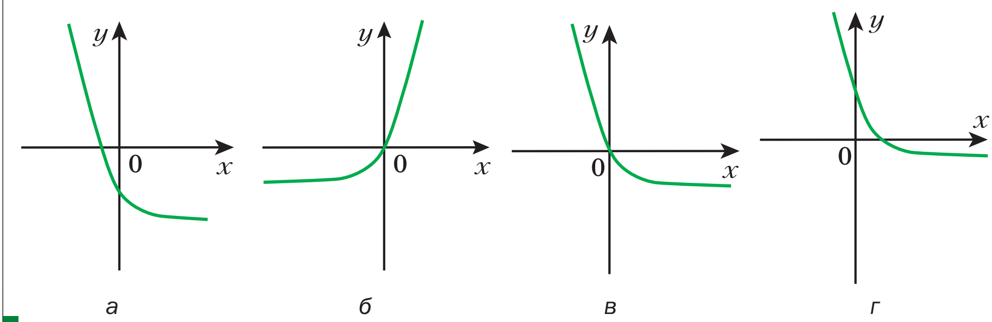

Рис. 1.7

1.28. Определите графически количество корней уравнения:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = x^2$; 3) $2^x = \sin x$; 4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.29. Определите графически количество корней уравнения:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.30. Постройте график функции:

1) $y = 2^{|x|}$; 3) $y = |2^x - 1|$;

2) $y = 2^{|x|} + 1$; 4) $y = \left|\frac{1}{2^x} - 1\right|$.

1.31. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{3^{|x|}}$; 2) $y = 3^{|x|} - 1$; 3) $y = |3^x - 1|$.

1.32. Постройте график функции $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.33. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

1.34. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 6^{\cos x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|} + 5$.

1.35. Решите неравенство:

1) $2^{\operatorname{tg} x} > 0$; 2) $2^{\arcsin x} > -\frac{\pi}{4}$; 3) $2^{\arccos x} > \arccos x - \pi$.

1.36. Решите неравенство:

1) $2^x > \sin x - 1$; 3) $2^{\operatorname{ctg} x} > \cos x - 1$.

2) $2^x > \arcsin x - \frac{\pi}{2}$;

1.37. Постройте график функции:

1) $y = \left|2^{-|x|} - 1\right|$; 2) $y = \frac{2^{|x|} - 1}{|2^x - 1|}$.

1.38. Постройте график функции:

1) $y = \left|1 - 3^{|x|}\right|$; 2) $y = \frac{|1 - 3^{-x}|}{3^{|x|} - 1}$.

◆ ◆ ◆

1.39. Сравните $(7 + 4\sqrt{3})^{-5,2}$ и $(7 - 4\sqrt{3})^{5,6}$.

1.40. Найдите область значений функции $f(x) = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$.

1.41. Найдите область значений функции $f(x) = 3^{(\sin x \cos x)}$.

1.42. Решите уравнение:

1) $2^{\cos x} = x^2 + 2$; 2) $2^{\sqrt{x}} = \cos x$.

1.43. Решите уравнение:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = x^2 + 1$; 2) $2^{|x|} = \cos x$.

1.44. Решите неравенство:

1) $2^{x^2} \geqslant \sin x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant |\sin x| + 1$; 3) $2^{\sqrt{x}} \geqslant 1 - x^2$.

1.45. Решите неравенство:

1) $2^{x^2} > \cos x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant x^2 + 1$.

1.46. Исследуйте на чётность функцию $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.

1.47. Исследуйте на чётность функцию $y = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$.

1.48. Исследуйте на чётность функцию $y = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x$.

1.49. Исследуйте на чётность функцию $y = (\sqrt{2}+1)^x - (\sqrt{2}-1)^x$.

1.50. Найдите область значений функции $y = \dfrac{2^x - 1}{2^x - 4}$.

1.51. Найдите область значений функции $y = \dfrac{3^x}{3^x - 9}$.

1.52. Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что a^b — рациональное число?

§ 2 Показательные уравнения

Рассмотрим уравнения $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

Во всех этих уравнениях переменная содержится только в показателе степени. Данные уравнения — примеры **показательных уравнений**.

При решении многих показательных уравнений используют следующую теорему.

Теорема 2.1

При $a > 0$ и $a \neq 1$ равенство $a^{x_1} = a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

Доказательство

Очевидно, что если $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Докажем, что из равенства $a^{x_1} = a^{x_2}$ следует равенство $x_1 = x_2$. Предположим, что $x_1 \neq x_2$, то есть $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$. Пусть, например, $x_1 < x_2$.

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$. Она является либо возрастающей, либо убывающей. Тогда из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) или $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Однако по условию выполняется равенство $a^{x_1} = a^{x_2}$. Получили противоречие.

Аналогично получают противоречие для случая, когда $x_1 > x_2$. Таким образом, $x_1 = x_2$. ■

Следствие

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (1)$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$