

А. Г. Мерзляк  
В. Б. Полонский  
Е. М. Рабинович  
М. С. Якир

**Математика:**  
***алгебра и начала  
математического анализа,  
геометрия***

# Алгебра и начала математического анализа

Дидактические материалы



## 11 класс

Базовый уровень



Москва  
Издательский центр  
«Вентана-Граф»  
2020

УДК 373.167.1:512  
ББК 22.14я72  
М52

**Мерзляк, А. Г.**

М52 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень : 11 класс : дидактические материалы / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович, М. С. Якир. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 110, [2] с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-10756-9

Пособие содержит упражнения для самостоятельных и контрольных работ. Используется в комплекте с учебником «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа : 11 класс : базовый уровень» (авт. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский, М. С. Якир).

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования.

УДК 373.167.1:512  
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-360-10756-9

© Мерзляк А. Г., Полонский В. Б.,  
Рабинович Е. М., Якир М. С., 2020  
© Издательский центр «Вентана-Граф», 2020

## От авторов

Данное пособие входит в учебно-методический комплект «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» авторов А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полонского, М. С. Якира.

Первая часть пособия («Упражнения») разделена на три однотипных варианта по 174 задачи в каждом. Задачи, имеющие одинаковые номера, являются однотипными. Этот материал в первую очередь предназначен для составления проверочных работ. Наличие к каждому типу задач ещё двух аналогичных заданий (по вариантам) позволяет также использовать этот материал для отработки навыков решения основных типов задач.

Вторая часть пособия содержит примерные контрольные работы.

В книге отсутствует раздел «Ответы». Это сделано намеренно, чтобы можно было использовать сборник как раздаточный дидактический материал для контрольных и проверочных работ.

## Упражнения

### Вариант 1

Степень с произвольным действительным показателем.

#### Показательная функция

1. Найдите значение выражения:
  - 1)  $2^{(\sqrt{5}-1)^2} \cdot 2^{2\sqrt{5}}$ ;      3)  $\left((\sqrt[4]{3})^{\sqrt{12}}\right)^{\sqrt{12}}$ .
  - 2)  $11^{\sqrt{18}} : 121^{\sqrt{2}}$ ;
2. Упростите выражение:
  - 1)  $(a^{\sqrt{3}} - 4)(a^{\sqrt{3}} + 4) - (a^{\sqrt{3}} - 3)^2$ ;      2)  $\frac{a^{2\sqrt{5}} - 49}{a^{2\sqrt{5}} - 7a^{\sqrt{5}}}$ .
3. Сравните значения выражений:
  - 1)  $3^{2,4}$  и  $3^{3,14}$ ;      4)  $0,22^{-2}$  и  $1$ ;
  - 2)  $0,4^{0,5}$  и  $0,4^{0,6}$ ;      5)  $(\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$  и  $(\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}$ ;
  - 3)  $1$  и  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;      6)  $(\sqrt{2}-1)^{-1,4}$  и  $(\sqrt{2}-1)^{-1,5}$ .
4. Сравните с числом  $1$  положительное число  $a$ , если:
  - 1)  $a^{\frac{3}{5}} > a^{\frac{4}{7}}$ ;      2)  $a^{-\frac{2}{3}} < a^{\frac{1}{9}}$ ;      3)  $a^{0,2} > 1$ .
5. Сравните числа  $m$  и  $n$ , если:
  - 1)  $3,8^m < 3,8^n$ ;      3)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^m > \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ .
  - 2)  $0,7^m < 0,7^n$ ;
6. Найдите область значений функции:
  - 1)  $y = -7^x$ ;      3)  $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x - 2$ ;
  - 2)  $y = 7^x + 3$ ;      4)  $y = 7^{|x|}$ .
7. Найдите наибольшее значение функции  $y = 0,3^x$  на промежутке  $[-1; 3]$ .

8. Постройте график функции:

- 1)  $y = 2^x + 1$ ;                      3)  $y = 3 - 2^x$ ;  
 2)  $y = 2^{x-2}$ ;                      4)  $y = |2^x - 3|$ .

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

- 1)  $y = 9^{\sin x}$ ;                      2)  $y = \left(\frac{1}{9}\right)^{|\cos x|} + 1$ .

Показательные уравнения

10. Решите уравнение:

- 1)  $2^x = 128$ ;                      6)  $(10^{x-5})^{x-6} = 100$ ;  
 2)  $3^{5x+1} = 3^{2x}$ ;                      7)  $\left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{35}{12}\right)^x = \frac{9}{49}$ ;  
 3)  $5^{x^2-5x-14} = 1$ ;                      8)  $3^{4x-x^2} = 17^{4x-x^2}$ ;  
 4)  $4^x = 8$ ;                      9)  $4^x \cdot 5^{x-1} = 0,2 \cdot 20^{3-2x}$ ;  
 5)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x} = \left(\frac{8}{27}\right)^{x+3}$ ;                      10)  $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$ .

11. Решите уравнение:

- 1)  $4^{x+1} + 4^x = 320$ ;  
 2)  $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x-1} = 279$ ;  
 3)  $2 \cdot 7^{x+1} - 6 \cdot 7^{x-1} - 7^x = 85$ ;  
 4)  $2 \cdot 16^x - 3 \cdot 2^{4x-1} + 7 \cdot 4^{2x-2} = 120$ ;  
 5)  $6^x - 5 \cdot 6^{x-1} - 25 \cdot 6^{x-3} = 11^{x-1} - 9 \cdot 11^{x-2} - 16 \cdot 11^{x-3}$ ;  
 6)  $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$ .

12. Решите уравнение:

- 1)  $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ ;  
 2)  $3 \cdot 81^x - 8 \cdot 9^x - 3 = 0$ ;  
 3)  $2^{2x+6} + 2^{x+7} = 17$ ;  
 4)  $49^{x-2} - 56 \cdot 7^{x-3} + 7 = 0$ ;  
 5)  $\frac{9}{4^{x-1} - 1} - \frac{6}{4^{x-1} + 2} = 2$ ;  
 6)  $3^x - 3^{2-x} - 8 = 0$ ;  
 7)  $3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$ ;  
 8)  $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$ .

13. Решите уравнение:

1)  $6 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x - 4^x = 0$ ;

2)  $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$ .

14. Решите уравнение:

1)  $2^x = 3 - x$ ;

3)  $2^{\cos x} = x^2 + 2$ .

2)  $3^{x-3} + 4^{x-3} = 25$ ;

15. При каких значениях  $a$  уравнение  $4^x - (a + 3) \cdot 2^x + 4a - 4 = 0$  имеет один действительный корень?

16. При каких значениях  $a$  уравнение  $25^x - (a - 4) \cdot 5^x - 2a^2 + 10a - 12 = 0$  не имеет действительных корней?

### Показательные неравенства

17. Установите соответствие между неравенствами, записанными в левом столбце, и их множествами решений, записанными в правом столбце.

Неравенства	Множества решений
А) $3^x \geq 3$	1) $[-1; +\infty)$
Б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 3$	2) $(-\infty; -1]$
В) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 3$	3) $[1; +\infty)$
Г) $3^x \leq 3$	4) $(-\infty; 1]$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

18. Решите неравенство:

1)  $4^x > \frac{1}{64}$ ;

3)  $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{6}{5}\right)^{4x-5}$ ;

2)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{81}$ ;

4)  $0,6 \frac{x^2 - 7x + 12}{x} \leq 1$ ;

$$5) 8 \cdot 2^{x^2-8x} > 0,25^{2x}; \quad 7) 0,2^{x-2} \leq 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{x}};$$

$$6) 0,4 \frac{x^2-4}{x} \leq \frac{125}{8}; \quad 8) \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1+\frac{4}{x-2}} \leq \left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{4}{x-4}}.$$

19. Решите неравенство:

$$1) 2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} \leq 5; \quad 2) 0,5^{x-1} + 0,5^{x+1} \geq 80.$$

20. Решите неравенство:

$$1) 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0;$$

$$2) 7^{2x+1} - 8 \cdot 7^x + 1 < 0;$$

$$3) 36^{x+0,5} + 5 \cdot 6^x - 1 \geq 0;$$

$$4) 5^{-x} + 24 \leq 25 \cdot 5^x;$$

$$5) 8 \cdot 0,5^{2x} - 17 \cdot 0,5^x + 2 \leq 0;$$

$$6) 9^{x+1} + 26 \cdot 3^x - 3 < 0.$$

21. Решите неравенство:

$$1) 12^x - 2 \cdot 6^x - 36 \cdot 2^x + 72 \leq 0;$$

$$2) \frac{0,3^x - 0,0081}{7-x} \geq 0.$$

22. Решите неравенство:

$$1) 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \geq 0;$$

$$2) 5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} < 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}.$$

### Логарифм и его свойства

23. Найдите:

$$1) \log_2 8; \quad 4) \log_{20} 20; \quad 7) \lg 0,001;$$

$$2) \log_{13} \frac{1}{13}; \quad 5) \log_5 0,04; \quad 8) \log_{36} 216;$$

$$3) \log_{14} 1; \quad 6) \log_{81} 3; \quad 9) \log_{0,2} 625.$$

24. Найдите значение выражения:

$$1) \log_{\frac{1}{3}} \log_2 512; \quad 2) \log_9 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6};$$

3)  $\log_2 32 - \log_{21} \sqrt{21} - 3\log_4 \frac{1}{64}$ ; 7)  $\log_{64} \sqrt[3]{2}$ ;

4)  $\log_{18} 36 + \log_{18} 9$ ; 8)  $10^{2\lg 7}$ ;

5)  $\log_5 250 - \log_5 2$ ; 9)  $27^{1-\log_3 4}$ ;

6)  $\frac{\lg 27}{\lg 3}$ ; 10)  $5^{\frac{4}{\log_3 5}}$ .

25. Решите уравнение:

1)  $\log_2 x = 4$ ; 3)  $\log_8 x = 1$ ; 5)  $\log_{x-1} 25 = 2$ ;

2)  $\log_{\sqrt[3]{3}} x = 9$ ; 4)  $\log_x 8 = 3$ ; 6)  $\log_x 36 = \frac{2}{3}$ .

26. Решите уравнение:

1)  $3^x = 5$ ; 2)  $2^{x+9} = 12$ ; 3)  $7^{2x-3} = 6$ .

27. Найдите значение выражения:

1)  $(\log_2 12 - \log_2 3 + 9^{\log_9 8})^{\lg 3}$ ;

2)  $\frac{2\log_3 4 + \log_3 0,5}{\log_3 6 - \log_3 12}$ .

28. Вычислите значение выражения

$$3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3} + \frac{1}{3} \log_3 8} - 27 \log_2 4 \sqrt[4]{2 \sqrt[3]{2}}.$$

29. Найдите значение выражения  $\frac{9 - \lg^2 2}{4 \lg \sqrt[4]{1000} + \lg 2} + \lg 2$ .

30. Постройте график функции:

1)  $y = 4^{\log_4(x-2)}$ ; 3)  $y = \log_5 \log_{3-x}(3-x)^{125}$ ;

2)  $y = \log_{x+1}(x+1)$ ; 4)  $y = \log_3 x \cdot \log_x \frac{1}{9}$ .

### Логарифмическая функция и её свойства

31. Сравните:

1)  $\log_7 8$  и  $\log_7 10$ ; 3)  $\log_3 12$  и 2;

2)  $\log_{\frac{1}{3}} 6$  и  $\log_{\frac{1}{3}} 5$ ; 4)  $\log_{\frac{1}{25}} 4$  и  $-\frac{1}{2}$ .





5)  $y = \log_{x-1}(5-x);$

6)  $y = \lg(12+x-x^2) + \frac{1}{\lg(2-x)}.$

38. Постройте график функции:

1)  $y = \log_3(x-2);$

2)  $y = \log_3 x - 2;$

3)  $y = -\log_3 x;$

4)  $y = \log_3(-x);$

5)  $y = \left| \log_{\frac{1}{3}} x \right|;$

6)  $y = \log_{\frac{1}{3}} |x|.$

### Логарифмические уравнения

39. Решите уравнение:

1)  $\log_3(2x-5) = 3;$

2)  $\log_{0,2}(x+4) = -2;$

3)  $\log_{\frac{1}{27}}(x^2-8x) = -\frac{2}{3};$

4)  $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0;$

5)  $\log_2(9-2^x) = 3-x;$

6)  $\log_{x-2}(4x^2-14x+7) = 2.$

40. Решите уравнение:

1)  $\log_{12}(5x-6) = \log_{12}(x+2);$

2)  $\log_{0,6}(3x-4) = \log_{0,6}(2x-3);$

3)  $\log_8(x^2-7x+4) = \log_8(x-3);$

4)  $2\log_5(-x) = \log_5(6x+16).$

41. Решите уравнение:

1)  $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1;$

2)  $\log_4(x-2) = 1 - \log_4(x+1);$

3)  $\log_5(x+3) - \log_5(1-x) = \log_5(2x+3);$

4)  $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1;$

5)  $2\log_4(4-x) = 4 - \log_2(-2-x);$

$$6) 1 - \lg 5 = \lg(x - 3) - \frac{1}{2} \lg(3x - 2);$$

$$7) 2 \log_7(x - 2) = \log_7(x - 10)^2 - 2.$$

42. Решите уравнение:

$$1) \log_{\frac{2}{3}} x - 4 \log_3 x + 3 = 0;$$

$$2) \lg^2 x - \lg x^2 - 3 = 0;$$

$$3) \log_{\frac{2}{5}} x^3 - 10 \log_5 x + 1 = 0;$$

$$4) \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1;$$

$$5) \lg(10x) \cdot \lg(0,01x) = \lg x^3 - 5;$$

$$6) \lg \lg x + \lg(\lg x^4 - 3) = 0;$$

$$7) \log_{\frac{2}{2}} 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8;$$

$$8) 0,5 \log_x 49 - 3 \log_7 x = 2.$$

43. Решите уравнение:

$$1) x^{\lg x - 5} = 0,0001;$$

$$3) 2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 32;$$

$$2) x^{\log_4 x} = 256x^3;$$

$$4) x^{\lg^3} + 3^{\lg x} = 54.$$

44. Решите уравнение:

$$1) \frac{2 \log_3(-x)}{\log_3(-3 - 4x)} = 1;$$

$$2) \frac{\log_4(x^2 - x - 2) - 1}{\log_3(x - 2)} = 0.$$

45. Выясните, при каких значениях  $a$  данное уравнение имеет корни, и найдите их:

$$1) \log_8(x + 2) = \log_8(2x - a);$$

$$2) \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2ax) = \log_{\frac{1}{3}}(-x - 2a + 2).$$

46. При каких значениях  $b$  уравнение  $2 \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) = \log_{\frac{1}{2}} 2bx$  имеет единственный корень?

### Логарифмические неравенства

47. Каждому неравенству, записанному в левом столбце, поставьте в соответствие изображение его множества решений из правого столбца.