

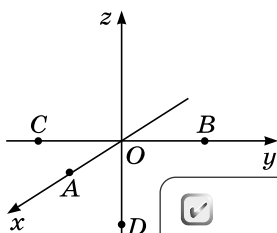
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
Е. М. Рабинович
М. С. Якир

 | российский
учебник

Математика:
*алгебра и начала
математического анализа,
геометрия*

Геометрия

Дидактические материалы



11 класс



Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2020

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
М52

Мерзляк, А.Г.

М52 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень : 11 класс : дидактические материалы / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович и др. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 128 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-10757-6

Пособие содержит упражнения для самостоятельных и контрольных работ. Используется в комплекте с учебником «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 класс» (авт. А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский и др.).

Пособие соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования.

УДК 373.167.1:514

ББК 22.151я72

ISBN 978-5-360-10757-6

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б.,
Рабинович Е.М., Якир М.С., 2020
© Издательский центр «Вентана-Граф»,
2020

От авторов

Данное пособие вместе с учебником входит в учебно-методический комплект «Геометрия. 11 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др.

Раздел «Упражнения» состоит из трёх однотипных вариантов по 335 задач в каждом (задачи, имеющие одинаковые номера, являются однотипными). Этот материал в первую очередь предназначен для самостоятельных проверочных работ. Наличие к каждому типу задач ещё двух аналогичных заданий (по вариантам) позволяет также использовать этот материал для отработки навыков решения основных типов задач.

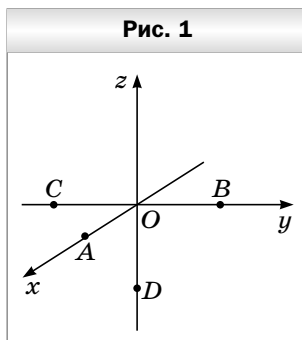
Раздел «Контрольные работы» содержит примерные контрольные работы.

Упражнения

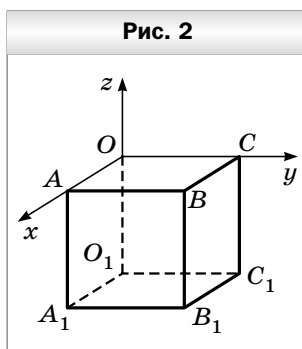
Вариант 1

Декартовы координаты точки в пространстве

1. Точки A , B , C и D расположены в прямоугольной системе координат так, как показано на рисунке 1. Расстояние от каждой из точек A , B , C и D до начала координат равно 3. Найдите координаты этих точек.



2. Куб $ABCO_1B_1C_1O_1$ расположен в прямоугольной системе координат так, как показано на рисунке 2. Ребро куба равно 4. Найдите координаты вершин куба.



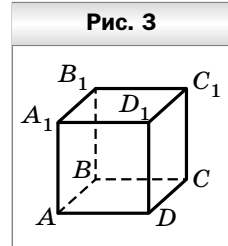
3. Определите, лежит ли данная точка на координатной оси, и в случае утвердительного ответа укажите эту ось:
- 1) $D(0; -6; 8)$;
 - 2) $E(0; 0; 12)$;
 - 3) $F(3,6; 0; -4,5)$;
 - 4) $M(0; -1,4; 0)$;
 - 5) $K(-2; 3; -4)$;
 - 6) $F(0; 0; -20)$.
4. Определите, принадлежит ли данная точка координатной плоскости, и в случае утвердительного ответа укажите эту плоскость:
- | | |
|---------------------|-----------------------|
| 1) $A(8; -7; 13)$; | 4) $D(0; 0; 5)$; |
| 2) $B(6; -2; 0)$; | 5) $M(17; -18; 15)$; |
| 3) $C(-1; 0; 1)$; | 6) $K(0; 6; -6)$. |
5. Какие из точек $M(8; -2; 1)$, $N(8; 2; 1)$, $P(-4; -2; 1)$, $K(4; 2; -1)$ лежат на одной прямой, параллельной оси абсцисс?

6. Какие из точек $D(6; 9; -4)$, $E(6; 9; 4)$, $F(5; -7; 4)$, $K(5; -7; 3)$ лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xy ?
7. Укажите расстояние от точки $D(-4; -2; 1)$ до координатной плоскости:
1) xy ; 2) yz ; 3) xz .
8. Найдите расстояние между точками $A(3; -2; 3)$ и $B(-1; 2; 5)$.
9. Найдите расстояние от точки $D(-2; 3; 8)$ до оси абсцисс.
10. Расстояние между точками $A(4; -5; 2)$ и $B(1; y; -4)$ равно 7. Найдите значение y .
11. Найдите точку, принадлежащую оси ординат и равноудалённую от точек $A(-2; 3; 1)$ и $B(1; 2; -4)$.
12. Найдите координаты середины отрезка FK , если $F(-2; 3; 4)$, $K(6; 1; -2)$.
13. Точка M — середина отрезка AB . Найдите координаты точки B , если $A(-3; 8; 5)$, $M(-5; 4; -6)$.
14. Точки $A(5; -3; 4)$ и $D(-3; 1; -2)$ симметричны относительно точки C . Найдите координаты точки C .
15. Найдите координаты точек, симметричных точкам $A(3; -4; 1)$, $D(-2; -9; -8)$ и $F(0; -7; 6)$ относительно:
1) начала координат; 2) плоскости yz .
16. Найдите координаты точки, которая делит отрезок MK в отношении $3 : 1$, считая от точки M , если $M(3; -5; 1)$, $K(-1; 7; 5)$.
17. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A(3; -4; 5)$, $B(-6; 1; 6)$, $C(-5; 2; 1)$.
18. Точки $B_1(2; -3; 4)$ и $C_1(-6; 1; 2)$ — середины сторон AC и AB треугольника ABC соответственно. Найдите координаты вершин A и B , если вершина C имеет координаты $(-3; 4; 6)$.
19. Даны точки $A(3; -1; -2)$, $B(-5; 7; 4)$, $C(1; 5; 2)$. Найдите среднюю линию MN треугольника ABC , где точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно.
20. Найдите координаты точек A и B и отрезок AB , если точка A принадлежит оси z , точка B лежит в плоскости xy и точка $C(-3; 1; -4)$ — середина отрезка AB .

21. Точки $M(4; -7; 2)$ и N симметричны относительно:
 1) начала координат; 2) плоскости yz . Найдите отрезок MN .
22. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(2; -3; 1)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(4; 1; 5)$ и $D(7; -2; 2)$ является ромбом.
23. Докажите, что точки $A(-5; 3; 2)$, $B(-23; 0; 17)$ и $C(1; 4; -3)$ лежат на одной прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

Векторы в пространстве

24. На рисунке 3 изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Верно ли утверждение:



- 1) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{C_1 D_1}$; 6) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$;
 2) $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{DC}$; 7) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;
 3) $\overrightarrow{AA_1} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BB_1}$; 8) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1 B_1}$;
 4) $\overrightarrow{A_1 C_1} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AC}$; 9) $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1}$?
 5) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{DC_1}|$;
25. Начертите призму $ABCA_1 B_1 C_1$. Отложите:
 1) от точки A вектор, равный вектору $\overrightarrow{A_1 A}$;
 2) от точки B вектор, равный вектору $\overrightarrow{C_1 B_1}$;
 3) от точки C_1 вектор, равный вектору \overrightarrow{AB} .
26. Найдите координаты вектора \overrightarrow{AB} , если $A(2; 3; 1)$, $B(1; -4; 5)$.
27. Найдите координаты начала вектора \overrightarrow{EF} $(6; -9; 2)$, если $F(-8; 3; -5)$.
28. Даны точки $A(3; -2; 5)$, $B(-4; y; 1)$, $C(x; -6; -11)$ и $D(-9; 2; z)$. При каких значениях x , y и z верно равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?
29. Используя векторы, докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(6; -1; -2)$, $B(4; 0; -7)$, $C(22; -11; -6)$ и $D(24; -12; -1)$ является параллелограммом.

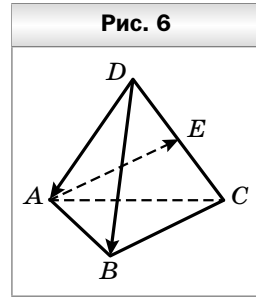
39. Может ли быть нулевым вектором сумма трёх векторов, модули которых равны:
1) 10; 13; 17; 2) 9; 12; 21; 3) 8; 11; 20?
40. Даны векторы \vec{m} (3; -4; 5) и \vec{n} (-2; 3; 7). Найдите:
1) координаты вектора $\vec{m} + \vec{n}$;
2) $|\vec{m} + \vec{n}|$.
41. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите разность векторов:
1) $\vec{B_1 A}$ и $\vec{A_1 D_1}$; 2) $\vec{A_1 C}$ и $\vec{D_1 D}$.
42. Даны векторы \vec{m} (3; -4; 5) и \vec{n} (-2; 3; 7). Найдите $|\vec{m} - \vec{n}|$.
43. Найдите координаты точки B такой, что $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{0}$, если A (-1; 9; -3), C (2; 11; -7).
44. Даны векторы \vec{b} (3; -5; -1), \vec{c} (x ; -8; 2) и \vec{d} (-4; 4; 5). Какое наименьшее значение принимает модуль вектора $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$?
45. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажите все векторы, противоположные вектору:
1) \vec{AB} ; 2) $\vec{CD_1}$; 3) $\vec{AC_1}$,
началом и концом каждого из которых являются вершины параллелепипеда.
46. Укажите координаты вектора, противоположного вектору \vec{a} (15; 5; -8).
47. Упростите выражение:
1) $\vec{AB} + \vec{MN} + \vec{BC} + \vec{NE} + \vec{CA} + \vec{EF}$;
2) $\vec{AC} + \vec{BK} - \vec{MT} - \vec{AM} - \vec{BC}$.
48. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите сумму векторов $\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{B_1 D_1} + \vec{BA} + \vec{A_1 C_1}$.
49. Основанием пирамиды $MABCD$ является прямоугольник $ABCD$, $AB = 6$ см, $AD = 8$ см. Найдите модуль вектора $\vec{a} = \vec{MA} - \vec{MD} + \vec{DC}$.
50. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Выразите вектор $\vec{C_1 C}$ через векторы $\vec{DA_1}$, $\vec{DB_1}$ и $\vec{DC_1}$.

63. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M — середина ребра $B_1 C_1$, точка K — середина ребра CD . Выразите вектор \overrightarrow{MK} через векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} и $\overrightarrow{AA_1}$.
64. На ребре BC тетраэдра $DABC$ отметили точку F так, что $BF : FC = 1 : 5$. Выразите вектор \overrightarrow{AF} через векторы \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB} и \overrightarrow{DC} .
65. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На ребре $A_1 B_1$ отметили точку E так, что $A_1 E : EB_1 = 2 : 1$, а на отрезке $A_1 D$ — точку F так, что $A_1 F : FD = 3 : 2$. Выразите вектор \overrightarrow{EF} через векторы $\overrightarrow{C_1 B_1}$, $\overrightarrow{C_1 C}$ и $\overrightarrow{C_1 D_1}$.
66. Найдите координаты образа точки $B(2; -15; 8)$ при гомотетии с центром в точке $A(-1; 3; 5)$ и коэффициентом гомотетии $k = \frac{2}{3}$.
67. Образом точки $P(6; -3; 4)$ при гомотетии с центром $A(-2; 1; 0)$ является точка $P_1(38; -19; 20)$. Найдите прообраз C точки $C_1(13; -4; -5)$ при этой гомотетии.
68. Через точку M , принадлежащую высоте пирамиды, проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найдите площадь меньшего основания образовавшейся при этом усечённой пирамиды, если площадь основания данной пирамиды равна 243 см^2 , а точка M делит её высоту в отношении $4 : 5$, считая от вершины пирамиды.

Скалярное произведение векторов

69. Найдите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , если:
- 1) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;
 - 2) $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$;
 - 3) $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 9$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.
70. Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 120° , $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$. Найдите скалярное произведение $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{a}$.
71. Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 30° , $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Найдите скалярное произведение $(\vec{a} - 2\vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})$.

72. Даны векторы \vec{a} и \vec{b} , $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.
Найдите $|\vec{2a} - \vec{3b}|$.
73. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $\vec{m} \perp \vec{n}$.
74. Ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равно a . Найдите скалярное произведение векторов:
1) \vec{BD} и $\vec{B_1D_1}$; 2) \vec{CD} и $\vec{AA_1}$; 3) \vec{AC} и $\vec{B_1A_1}$.
75. Ребро правильного тетраэдра $DABC$ равно a , точка E — середина ребра CD (рис. 6). Найдите скалярное произведение векторов:
1) \vec{AE} и \vec{DA} ; 2) \vec{AE} и \vec{DB} .
76. Ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равно a . На ребре BB_1 отметили точку M так, что $BM : MB_1 = 2 : 3$. Найдите скалярное произведение векторов \vec{DM} и $\vec{B_1B}$.
77. Найдите скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , если:
1) $\vec{a} (-2; 3; 1)$, $\vec{b} (-4; -5; 2)$;
2) $\vec{a} (0; 4; -7)$, $\vec{b} (-3; 0; 2)$.
78. Даны векторы $\vec{a} (4; -1; m)$ и $\vec{b} (3; m; 2)$. При каком значении m выполняется равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$?
79. Даны векторы $\vec{a} (2; -3; 5)$ и $\vec{b} (1; 2; z)$. При каком значении z векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны?
80. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} (2; -1; 2)$ и $\vec{b} (-4; 1; 3)$.
81. Найдите угол между векторами \vec{AB} и \vec{BC} , если $A (1; -3; 4)$, $B (2; -2; 5)$, $C (3; 1; 3)$.
82. Даны векторы $\vec{a} (2; 4; -3)$ и $\vec{b} (x; 1; 6)$. При каких значениях x угол между векторами \vec{a} и \vec{b} :
1) острый; 2) прямой; 3) тупой?
83. Докажите, используя векторы, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A (-1; -2; -1)$, $B (-4; -3; -4)$, $C (-1; -9; -5)$ и $D (2; -8; -2)$ является прямоугольником.



84. Даны точки $A(1; 0; -1)$, $B(-1; -2; 0)$ и $C(2; -1; 1)$. Найдите на оси y такую точку D , чтобы векторы \overline{AB} и \overline{CD} были перпендикулярны.
85. Найдите координаты вектора \vec{n} , коллинеарного вектору $\vec{k}(5; -3; 4)$, если $\vec{n} \cdot \vec{k} = -100$.
86. Даны векторы $\vec{a}(-2; 3; 1)$ и $\vec{b}(1; 4; -3)$. Найдите значение k , при котором векторы $\vec{a} + k\vec{b}$ и \vec{b} будут перпендикулярны.
87. Даны точки $A(1; 5; 8)$, $B(5; 2; 9)$, $C(7; 4; 7)$ и $D(8; 3; 0)$. Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости BCD .

Геометрическое место точек пространства.
Уравнение плоскости

88. Точка A принадлежит биссектору двугранного угла и удалена от его граней на 9 см. Найдите расстояние от точки A до ребра двугранного угла, если величина этого угла равна 120° .
89. При каком значении m точка $A(2; m; -3)$ принадлежит плоскости $5x - 2y + 4z - 7 = 0$?
90. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 3; -1)$ и перпендикулярной прямой AB , если $A(2; -6; 4)$, $B(6; -3; 5)$.
91. Составьте уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{m}(-6; 3; 15)$.
92. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $D(0; 0; 6)$ и перпендикулярной оси аппликат.
93. Найдите точки пересечения плоскости $4x - 6y + 3z + 24 = 0$ с осями координат.
94. Точки $A(-4; -2; 3)$ и $A_1(-6; 4; 3)$ симметричны относительно плоскости α . Составьте уравнение этой плоскости.
95. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $D(8; -7; 0)$ и параллельной плоскости $x - 2y + 5z + 6 = 0$.

96. Найдите угол между плоскостями:
 1) $2x - y + 4z - 20 = 0$ и $3x - 14y - 5z + 32 = 0$;
 2) $x + y - 2z + 3 = 0$ и $2x - y - 2z - 7 = 0$.
97. При каком значении n плоскость $x - 7y + 3z - 8 = 0$ будет параллельна прямой BC , если $B(3; -4; n)$, $C(2; -2; 1)$?
98. При каких значениях a и b плоскость $ax + by - 2z + 9 = 0$ будет перпендикулярна прямой AB , если $A(9; -3; 14)$, $B(12; -7; 15)$?
99. Найдите уравнение образа плоскости $2x - y - z + 2 = 0$:
 1) при симметрии относительно начала координат;
 2) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(4; -3; 2)$;
 3) при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $k = 2$.

Цилиндр

100. Площадь осевого сечения цилиндра равна 156 см^2 . Найдите высоту цилиндра, если радиус его основания равен 6 см .
101. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и образует с плоскостью основания угол 30° . Найдите высоту цилиндра и площадь его основания.
102. Радиус основания цилиндра равен 4 см , а его высота — 3 см . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
103. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
104. Прямоугольник со сторонами 8 см и 10 см вращается вокруг меньшей стороны. Найдите площадь полной поверхности полученного тела вращения.
105. Прямоугольник $ABCD$ является развёрткой боковой поверхности цилиндра, $AC = 8 \text{ см}$, $\angle ACD = 30^\circ$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если меньшая сторона прямоугольника $ABCD$ является высотой цилиндра.