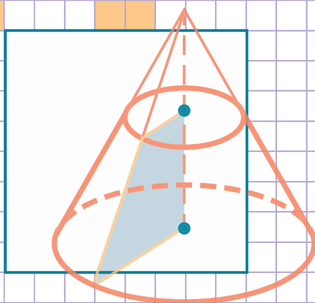
российский учебник

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. М. Поляков

Математика

ГЕОМЕТРИЯ

11 класс



Углублённый уровень

Учебное пособие

Под редакцией В. Е. Подольского

2-е издание, стереотипное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2020

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721.6
М52

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова,
доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.

М52 Математика. Геометрия. 11 класс : углублённый уровень : учебное пособие / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков ; под ред. В. Е. Подольского. — 2-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 254, [2] с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-11220-4

Учебное пособие предназначено для углублённого изучения геометрии в 11 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к геометрии.

Учебное пособие соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721.6

ISBN 978-5-360-11220-4

© Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Поляков В. М., 2019
© Издательский центр «Вентана-Граф», 2019

От авторов

В этом учебном году вы завершаете изучение школьного курса стереометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями, и этому пособствует учебник, который вы держите в руках.

Познакомьтесь с его структурой.

Учебник разделён на три главы, каждая состоит из параграфов. В них изложен теоретический материал; самые важные сведения выделены **жирным шрифтом** и *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать после изучения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, не простой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

◆

Простые задачи

◆ ◆

Задачи средней сложности

◆ ◆ ◆

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

■ Окончание доказательства теоремы

■ Окончание решения задачи

1.7. Задания, рекомендуемые для устной работы

1.12. Задания, рекомендуемые для домашней работы глава

1 Координаты и векторы в пространстве

- В этой главе вы ознакомитесь с прямоугольной системой координат в пространстве, научитесь находить координаты точек в пространстве, длину отрезка и координаты его середины.
- Вы обобщите и расширите свои знания о векторах.

§ 1 Декартовы координаты точки в пространстве

В предыдущих классах вы ознакомились с прямоугольной (декартовой) системой координат на плоскости — это две перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчёта (рис. 1.1).

Систему координат можно ввести и в пространстве.

Прямоугольной (декартовой) системой координат в пространстве называют три попарно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчёта (рис. 1.2). Точку, в которой пересекаются три координатные прямые, обозначают буквой O. Её называют **началом координат.** Координатные прямые обозначим буквами x, y и z, их соответственно называют **осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат.**

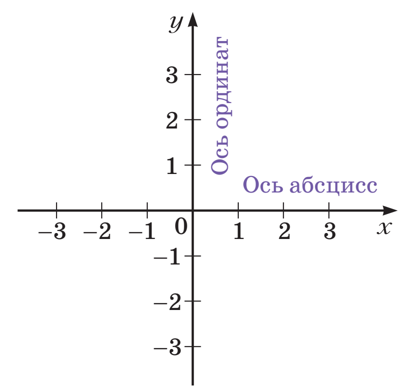


Рис. 1.1

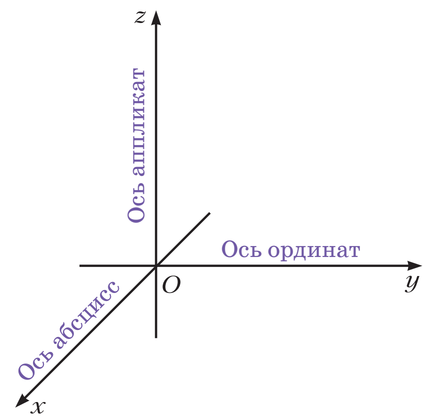


Рис. 1.2

Плоскости, проходящие через пары координатных прямых x и y, x и z, y и z, называют **координатными плоскостями**, их соответственно обозначают xy, xz и yz (рис. 1.3).

Пространство, в котором задана система координат, называют **координатным пространством**. Если оси координат обозначены буквами x, y и z, то координатное пространство обозначают xyz.

Из курса планиметрии вы знаете, что каждой точке M координатной плоскости xy ставится в соответствие упорядоченная пара чисел $(x; y)$, которые называют координатами точки M. Записывают: $M\ (x; y)$.

Аналогично каждой точке M координатного пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$, определяемая следующим образом. Проведём через точку M три плоскости α, β и γ перпендикулярно осям x, y и z соответственно. Точки пересечения этих плоскостей с координатными осями обозначим M_x, M_y и M_z (рис. 1.4). Координату точки M_x на оси x называют **абсциссой** точки M и обозначают буквой x. Координату точки M_y на оси y называют **ординатой** точки M и обозначают буквой y. Координату точки M_z на оси z называют **аппликатой** точки M и обозначают буквой z.

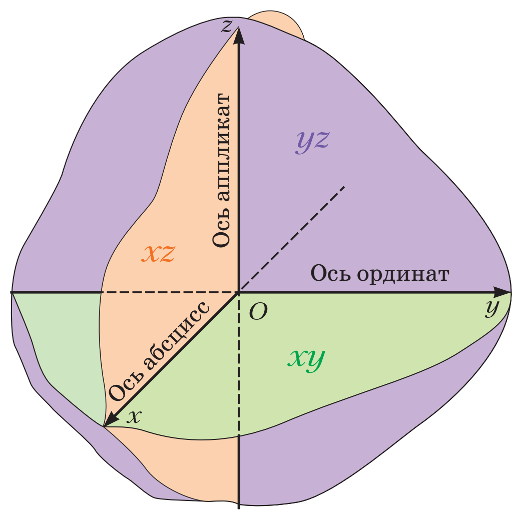


Рис. **1.3**

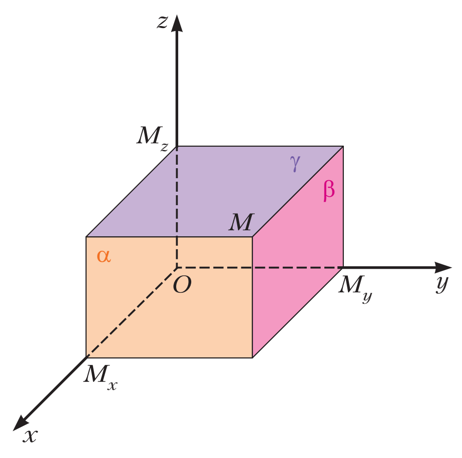


Рис. **1.4**

Полученную таким образом упорядоченную тройку чисел $(x; y; z)$ называют **координатами точки** M в пространстве. Записывают: $M\ (x; y; z)$.

Если точка принадлежит координатной плоскости или координатной оси, то некоторые её координаты равны нулю. Например, точка $A\ (x;\ y;\ 0)$ принадлежит координатной плоскости xy, а точка $B\ (0;\ 0;\ z)$ принадлежит оси аппликат.

Теорема 1.1

Расстояние между двумя точками $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ можно найти по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Доказательство

Прямая AB не может быть параллельна сразу трём координатным прямым.

Пусть прямая AB не параллельна оси z (случаи, когда прямая AB не параллельна осям x и y, рассматривают аналогично).

Спроектируем точки A и B на координатную плоскость xy. Получим точки A_1 и B_1 (рис. 1.5). Очевидно, что абсцисса и ордината точки A соответственно равны абсциссе и ординате точки A_1. Таким же свойством обладают точки B и B_1. Из курса планиметрии вы знаете, что

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

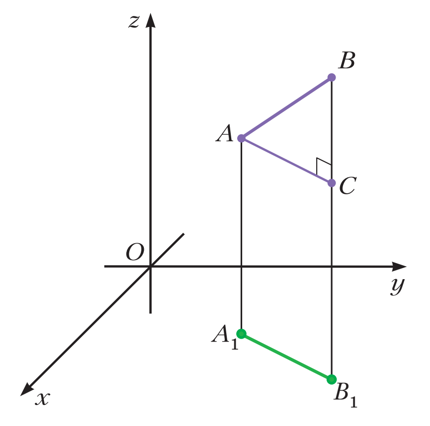


Рис. 1.5

Если отрезок AB параллелен координатной плоскости xy или ей принадлежит, то аппликаты точек A и B равны, т. е. $z_1 = z_2$ и $AB = A_1B_1$. Имеем:

$$AB = A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 0} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Следовательно, для рассматриваемого случая теорема доказана.

Пусть отрезок AB не параллелен координатной плоскости xy и ей не принадлежит. В трапеции ABB_1A_1 проведём высоту AC (см. рис. 1.5). Очевидно, что $BC = |z_2 - z_1|$. Из прямоугольного треугольника ABC получаем:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{A_1B_1^2 + BC^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$ ■

Теорема 1.2

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Доказательство

Достаточно доказать, что точка $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ является серединой отрезка с концами $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$.

Имеем: $$AM = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2 + \left(\frac{z_1 + z_2}{2} - z_1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \frac{1}{2}AB;$$

$$MB = \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(z_2 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \frac{1}{2}AB.$$

Итак, мы получили, что $AB = AM + MB$ и $AM = MB$. Следовательно, точка M — середина отрезка AB. ■

Теорему 1.2 можно обобщить. ***Если точка M, принадлежащая отрезку AB, такова, что*** $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$***, то координаты точки M имеют вид:*** $M\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}; \frac{ny_1 + my_2}{m + n}; \frac{nz_1 + mz_2}{m + n}\right)$. Для доказательства этого факта достаточно показать, что выполняются два равенства: $AB = AM + MB$ и $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$.

Задача. По заданным координатам вершин тетраэдра найдите координаты его центроида.

Решение. Пусть точки $A\ (x_1; y_1; z_1)$, $B\ (x_2; y_2; z_2)$, $C\ (x_3; y_3; z_3)$ и $D\ (x_4; y_4; z_4)$ являются вершинами тетраэдра $DABC$. Тогда точка E — середина ребра AB — имеет такие координаты: $E\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ (рис. 1.6). Пусть F — точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $\frac{CF}{FE} = \frac{2}{1}$. Пользуясь обобщением теоремы 1.2, найдём координаты точки F. Имеем: $F\left(\dfrac{x_3 + 2\dfrac{x_1 + x_2}{2}}{3}; \dfrac{y_3 + 2\dfrac{y_1 + y_2}{2}}{3}; \dfrac{z_3 + 2\dfrac{z_1 + z_2}{2}}{3}\right)$. Тогда координаты точки F имеют вид: $F\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$.

Пусть точка M — центроид тетраэдра $ABCD$. Тогда точка M принадлежит отрезку DF, причём $\dfrac{DM}{MF} = \dfrac{3}{1}$. Вновь воспользовавшись обобщением теоремы 1.2, устанавливаем, что координаты точки M имеют вид: $M\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}; \dfrac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}\right)$. ■

Ещё один способ решения этой задачи можно получить, если воспользоваться тем, что центроид тетраэдра совпадает с точкой пересечения его средних линий (см. § 23 учебника «Геометрия. 10 класс». Авторы А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков).

Для вас наверняка уже стало привычным, что при изучении физики регулярно применяются математические методы. Однако и физические законы тоже могут лечь в основу эффективных методов решения математических задач. Например, положение центроида тетраэдра можно связать с его центром масс.

Представим себе, что вершины A, B, C и D тетраэдра — это материальные точки массой m (рис. 1.7). Тогда центр масс этой системы из четырёх материальных точек совпадает с центроидом тетраэдра.

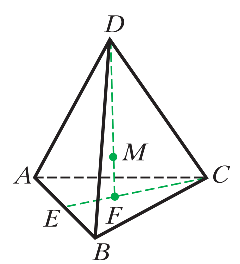


Рис. 1.6

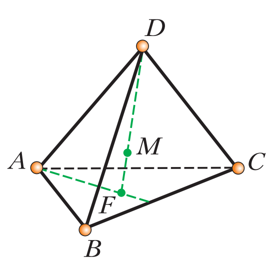


Рис. 1.7

Действительно, из курса физики вы знаете, что точка F (центроид треугольника ABC) является центром масс системы материальных точек A, B и C. Если точки A, B и C заменить одной материальной точкой F с массой $3m$, то положение центра масс всей системы не изменится. Поскольку центр масс материальных точек D и F расположен в точке M, то M — центр масс материальных точек A, B, C и D.

Описанный выше приём относят к так называемому **методу геометрии масс**. Более подробно вы сможете ознакомиться с этим методом, если примете участие в проекте «Геометрия масс» (с. 229).

?
1. Как называют три попарно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчёта?
2. Как называют точку, в которой пересекаются три координатные прямые?
3. Как называют координатную прямую, обозначенную буквой x? буквой y? буквой z?
4. Как называют плоскость, проходящую через пару координатных прямых?
5. Как называют пространство, в котором задана система координат?
6. Опишите, каким образом каждой точке M координатного пространства ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$.
7. Как найти расстояние между двумя точками, если известны их координаты?
8. Как найти координаты точки, делящей отрезок в данном отношении, если известны координаты его концов?

Упражнения

1.1. Определите, лежит ли данная точка на координатной оси, и в случае утвердительного ответа укажите эту ось:
1) A (4; –3; 0); 3) C (–6; 0; 0); 5) E (0; 0; –2);
2) B (1; 0; –5); 4) D (0; 7; 0); 6) F (3; 0; 0).

1.2. Определите, принадлежит ли данная точка координатной плоскости, и в случае утвердительного ответа укажите эту плоскость:
1) A (4; –3; 5); 3) C (3; 3; 0); 5) E (0; 4; 0);
2) B (0; –2; 6); 4) D (2; 0; 8); 6) F (–1; 1; 2).

1.3. Какие из точек A (5; –8; 1), B (5; 8; 1), C (–5; 7; 1), D (5; –7; –1) лежат на одной прямой, параллельной оси ординат?

1.4. Какие из точек D (2; 3; 4), E (–2; 3; 4), K (2; 3; –4), M (–2; –3; 4) лежат на одной прямой, параллельной оси аппликат?

1.5. Какие из точек A (–1; 6; 2), B (–1; –6; 2), C (1; 6; –2), D (1; –6; 2) лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xz?

1.6. Какие из точек M (5; 10; –3), N (5; 9; 3), K (4; –9; 3), P (4; –9; 2) лежат в одной плоскости, параллельной плоскости xy?

1.7. Укажите расстояние от точки M (4; –5; 2) до координатной плоскости:
1) xy; 2) xz; 3) yz.

1.8. Укажите координаты проекции точки $M(-3; 2; 4)$ на координатную плоскость:

1) xz; 2) yz; 3) xy.

1.9. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в прямоугольной системе координат так, как показано на рисунке 1.8. Точка A имеет координаты $(1; -1; 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.

1.10. Боковые рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны оси аппликат (рис. 1.9), $AD = 3$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Начало координат, точка O, является серединой ребра DD_1. Найдите координаты вершин параллелепипеда.

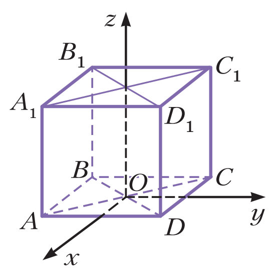


Рис. 1.8

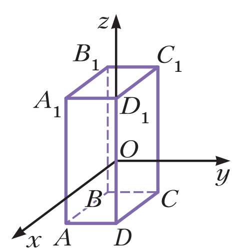


Рис. 1.9

1.11. Найдите расстояние между точками A и B, если:

1) $A(3; -4; 2)$, $B(5; -6; 1)$;

2) $A(-2; 3; 1)$, $B(-3; 2; 0)$.

1.12. Найдите расстояние между точками $C(6; -5; -1)$ и $D(8; -7; 1)$.

1.13. Найдите координаты середины отрезка CD, если $C(-2; 6; -7)$, $D(4; -10; -3)$.

1.14. Найдите координаты середины отрезка EF, если $E(3; -3; 10)$, $F(1; -4; -8)$.

1.15. Точки $P(7; 11; -9)$ и $K(8; -6; -1)$ симметричны относительно точки C. Найдите координаты точки C.

1.16. Точка S — середина отрезка AD, $A(-1; -2; -3)$, $S(5; -1; 0)$. Найдите координаты точки D.

1.17. Точки A и B симметричны относительно точки M, причём $B(1; 3; -5)$, $M(9; 0; -4)$. Найдите координаты точки A.

1.18. Найдите расстояние от точки $M(-3; 4; 9)$ до оси аппликат.

1.19. Найдите расстояние от точки $K(12; 10; -5)$ до оси ординат.

1.20. Расстояние между точками $A(1; y; 3)$ и $B(3; -6; 5)$ равно $2\sqrt{6}$. Найдите значение y.

1.21. Точка A принадлежит оси абсцисс. Расстояние от точки A до точки $C(1; -1; -2)$ равно 3. Найдите координаты точки A.

1.22. Точка M принадлежит отрезку AB и делит его в отношении 4 : 1, считая от точки A. Найдите координаты точки M, если A (2; –3; 2), B (–3; 1; –8).

1.23. Точка M принадлежит отрезку AB и делит его в отношении 1 : 2, считая от точки A. Найдите координаты точки B, если A (4; –6; 0), M (3; –2; –3).

1.24. Найдите точку, принадлежащую оси ординат и равноудалённую от точек A (2; 3; 1) и B (4; 1; –5).

1.25. Найдите точку, принадлежащую оси абсцисс и равноудалённую от точки A (–1; 2; 4) и плоскости yz.

1.26. Найдите точку, принадлежащую оси аппликат и равноудалённую от начала координат и точки M (3; –6; 9).

1.27. Точка C (–4; 3; 2) — середина отрезка AB, точка A принадлежит плоскости xz, точка B — оси y. Найдите координаты точек A и B.

1.28. На отрезке AB отметили точки C и D, делящие его на три равные части, точка C лежит между точками A и D. Найдите координаты точки B, если A (–14; 5; –8), D (7; –7; 2).

1.29. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если A (1; –2; 2), B (2; 6; 1), C (–1; –1; 3).

1.30. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (–2; 3; –1), B (–2; 7; –6), C (–1; 7; –6) и D (–1; 3; –1) является прямоугольником.

1.31. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (4; 2; 10), B (10; –2; 8), C (4; –4; 4) и D (–2; 0; 6) является ромбом.

1.32. Найдите точку, принадлежащую плоскости yz и равноудалённую от точек A (2; 1; –3), B (3; 2; –2) и C (4; –3; –1).

1.33. Найдите точку, расстояние от которой до плоскости xy равно 2 и равноудалённую от точек A (1; 0; 0), B (0; 1; 0) и C (0; 0; 1).

1.34. Точки D (–1; 2; 4), E (5; –2; 1) и F (3; –3; 5) являются серединами сторон некоторого треугольника. Найдите вершины этого треугольника.

1.35. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны координаты четырёх вершин: A (2; –1; 1), B (1; 3; 4), D (6; 0; 1), A_1 (4; 2; 0). Найдите координаты остальных вершин параллелепипеда.

1.36. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Найдите координаты точки K, если A (5; 3; –4), B (2; –1; –4), C (–7; 3; 1).

1.37. Отрезок BM — биссектриса треугольника ABC. Найдите координаты точки M, если A (3; 1; –3), B (7; –1; 1), C (1; 7; 1).

1.38. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6 см. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до точки пересечения медиан треугольника BA_1D.

1.39. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2 см, а боковое ребро равно 4 см. Точки K и M — середины рёбер BB_1 и A_1C_1 соответственно. Найдите расстояние от точки M до точки пересечения медиан треугольника AKC.

◆ ◆ ◆

1.40. Точка M — середина ребра B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 8 см. Найдите расстояние от точки C до центроида тетраэдра $MABD$.

1.41. Сторона основания и боковое ребро правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ соответственно равны 4 см и 8 см. Найдите расстояние от точки A_1 до центроида тетраэдра B_1ABC.

1.42. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для любой точки X пространства выполняется равенство $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$.

1.43. Точки M, N и K принадлежат соответственно рёбрам AA_1, B_1C_1 и CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Какое наименьшее значение может принимать сумма $MN^2 + NK^2 + KM^2$?

1.44. Рёбра AB, AD и AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 2 см, 4 см и 6 см. Плоскость, перпендикулярная диагонали BD_1 и проходящая через её середину, пересекает прямую A_1B_1 в точке M. Найдите отрезок A_1M.

1.45. Основанием пирамиды $MABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Ребро MA перпендикулярно плоскости основания. Известно, что $AB = 3$ см, $AD = 4$ см и $AM = 2$ см. Плоскость, перпендикулярная ребру MC и проходящая через его середину, пересекает прямые AB и AD в точках K и P соответственно. Найдите отрезок KP.

Упражнения для повторения

1.46. Основания равнобокой трапеции равны 13 см и 37 см, а её диагонали перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

1.47. По разные стороны от центра окружности проведены две параллельные хорды длиной 16 см и 10 см. Найдите радиус окружности, если расстояние между хордами равно 9 см.

§ 2 Векторы в пространстве

В курсе планиметрии вы изучали векторы на плоскости. Мы приступаем к изучению векторов в пространстве. Многие понятия и свойства, связанные с векторами на плоскости, можно почти дословно отнести к векторам в пространстве. Доказательства такого рода утверждений о векторах в пространстве совершенно аналогичны доказательствам соответствующих утверждений о векторах на плоскости. В таких случаях мы ограничимся формулировками утверждений, не приводя их доказательств. При этом свойства векторов в пространстве, которые не имеют аналогов на плоскости, будем изучать подробно.

Рассмотрим отрезок AB. Если мы договоримся точку A считать **началом** отрезка, а точку B — его **концом**, то такой отрезок будет характеризоваться не только длиной, но и направлением от точки A к точке B.

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка — его концом, то такой отрезок называют **направленным отрезком** или **вектором**.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (читают: «вектор AB»).

На рисунке 2.1 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$.

В отличие от отрезка, у которого концы — различные точки, у вектора начало и конец могут совпадать.

Договорились вектор, у которого начало и конец — одна и та же точка, называть **нулевым вектором** или **нуль-вектором** и обозначать $\vec{0}$.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка AB. Обозначают: $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора $\vec{a}$ обозначают так: $|\vec{a}|$. Модуль нулевого вектора считают равным нулю. Пишут: $|\vec{0}| = 0$.

Определение

Два ненулевых вектора называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

На рисунке 2.2 изображена четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ являются коллинеарными. Пишут: $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$.

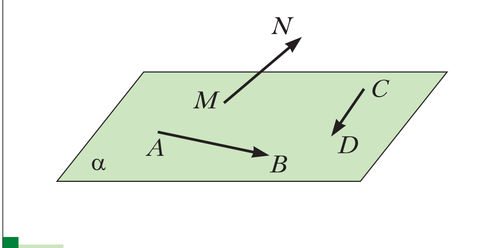


Рис. 2.1

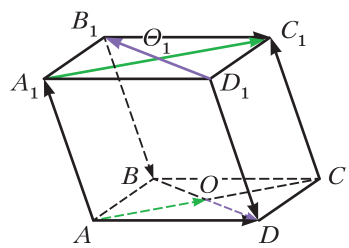


Рис. 2.2

Ненулевые коллинеарные векторы бывают **сонаправленными** и **противоположно направленными**. Например, на рисунке 2.2 векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ сонаправлены. Пишут: $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1C_1}$. Векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{D_1B_1}$ противоположно направлены. Пишут: $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1B_1}$.

Считают, что нулевой вектор не имеет направления.

Определение

Два ненулевых вектора называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

На рисунке 2.2 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1C_1}$.

Часто, говоря о векторах, мы не конкретизируем, какая точка является началом вектора. Так, на рисунке 2.3, *а* изображён вектор $\vec{a}$. На рисунке 2.3, *б* изображены векторы, равные вектору $\vec{a}$. Каждый из них тоже принято называть вектором $\vec{a}$. На рисунке 2.3, *в* изображены вектор $\vec{a}$ и точка A. Если построить вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен от точки** A (рис. 2.3, *г*).

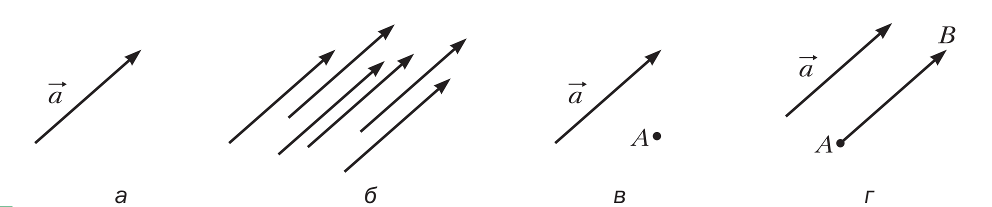


Рис. 2.3

Определение

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называют компланарными, если равные им векторы, имеющие общее начало, принадлежат одной плоскости.

Легко установить (сделайте это самостоятельно), что справедливы следующие утверждения:

если из трёх данных векторов найдутся два коллинеарных вектора, то эти три вектора являются компланарными;

если векторы компланарны, то все они параллельны некоторой плоскости.

На рисунке 2.4 изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ компланарны. Действительно, вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ равен