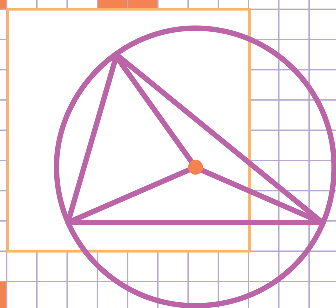
российский учебник

А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков

ГЕОМЕТРИЯ



8 класс

Учебник

Под редакцией В. Е. Подольского

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

2-е издание, стереотипное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2020

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721.6
М52

Одобрено Научно-редакционным советом корпорации «Российский учебник» под председательством академиков Российской академии наук В. А. Тишкова и В. А. Черешнева

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова, доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.

М52 Геометрия : 8 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков ; под ред. В. Е. Подольского. — 2-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 224 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-11232-7

Учебник предназначен для углублённого изучения геометрии в 8 классе и входит в завершённую предметную линию: «Геометрия. 7 класс», «Геометрия. 8 класс», «Геометрия. 9 класс» (авт. А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков).

Содержание учебника соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721.6

ISBN 978-5-360-11232-7

© Мерзляк А. Г., Поляков В. М., 2019
© Издательский центр «Вентана-Граф», 2019

От авторов

Дорогие восьмиклассники!

Мы надеемся, что вы не разочаровались, выбрав нелёгкий путь обучения в математическом классе.

В этом учебном году вы продолжите изучать геометрию по углублённой программе. Надеемся, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на пять глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, напечатанный **жирным шрифтом**, ***жирным курсивом*** и *курсивом*. Так в книге выделены определения, правила и важнейшие математические утверждения.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

Желаем успеха!

Условные обозначения

◆

Простые задачи

◆ ◆

Задачи среднего уровня сложности

◆ ◆ ◆

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

■ Окончание доказательства теоремы

■ Окончание доказательства следствия

■ Окончание доказательства леммы

■ Окончание решения задачи

2.1 Задания, рекомендуемые для устной работы

2.3 Задания, рекомендуемые для домашней работы глава

1 Многоугольники. Четырёхугольники

- В этой главе вы ознакомитесь с многоугольниками и их частными видами. Изучите свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника и ромба. Ознакомитесь с трапецией и её видами.

§ 1 Многоугольник и его элементы

Отрезки AB и BC, изображённые на рисунке 1.1, имеют только одну общую точку B, которая является концом каждого из них. Такие отрезки называют **соседними**. На рисунке 1.2 каждые два отрезка являются соседними.

Отрезки AB и CD на рисунке 1.3 не являются соседними.

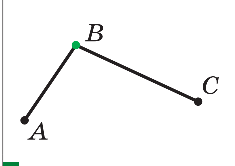


Рис. 1.1

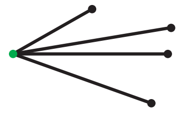


Рис. 1.2

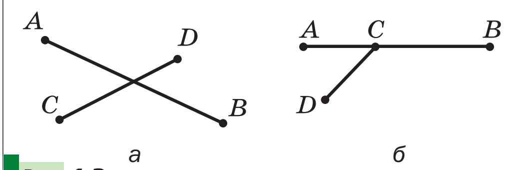


Рис. 1.3

Рассмотрим фигуру, состоящую из точек A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n и отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 таких, что никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой и никакие два несоседних отрезка не имеют общих точек (рис. 1.4).

Фигура, образованная этими отрезками, ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 1.5 зелёным цветом. Эту часть плоскости вместе с отрезками A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 называют **мно-**

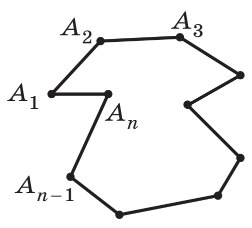


Рис. 1.4

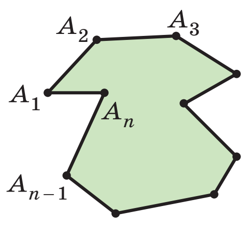


Рис. 1.5

гоугольником. Точки A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n называют **вершинами** многоугольника, а указанные выше отрезки — **сторонами** многоугольника.

Стороны, являющиеся соседними отрезками, называют **соседними сторонами** многоугольника. Вершины, являющиеся концами одной стороны, называют **соседними вершинами** многоугольника.

Две соседние стороны многоугольника задают **угол многоугольника**. Например, α, β, γ, δ — углы многоугольника (рис. 1.6), а угол φ не является углом многоугольника.

Многоугольник называют по количеству его углов: треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и т. п.

Многоугольник обозначают по его вершинам. Например, на рисунке 1.7 изображён пятиугольник $ABCDE$. В обозначении многоугольника буквы, стоящие рядом, соответствуют соседним вершинам. Например, пятиугольник, изображённый на рисунке 1.7, можно обозначить ещё и так: $CDEAB$, $EABCD$ и т. д.

Периметром многоугольника называют сумму длин всех его сторон.

Отрезок, соединяющий несоседние вершины многоугольника, называют **диагональю многоугольника**. Например, на рисунке 1.8 отрезок AE — диагональ многоугольника.

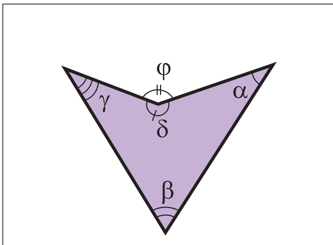


Рис. 1.6

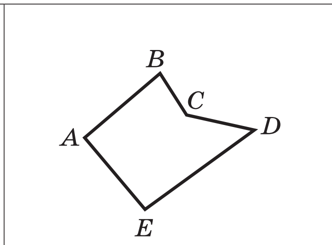


Рис. 1.7

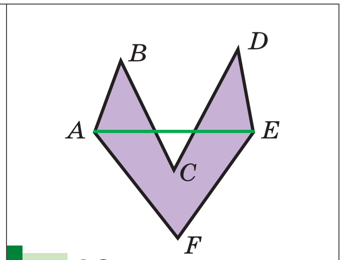


Рис. 1.8

На рисунке 1.9 изображён многоугольник, все углы которого меньше развёрнутого. Такой многоугольник называют **выпуклым**. Заметим, что многоугольники, изображённые на рисунках 1.6, 1.7, 1.8, не являются выпуклыми.

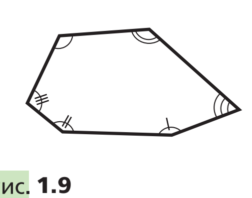


Рис. 1.9

Выпуклый многоугольник обладает такими свойствами:

1) выпуклый многоугольник расположен в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону (рис. 1.10);

2) выпуклый многоугольник содержит любую свою диагональ (рис. 1.11).

Так как ни один невыпуклый многоугольник такими свойствами не обладает (рис. 1.12, 1.8), то каждое из них можно рассматривать как признак выпуклости многоугольника.

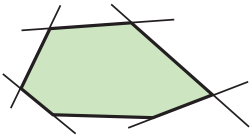


Рис. 1.10

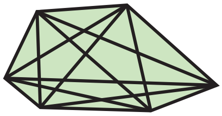


Рис. 1.11

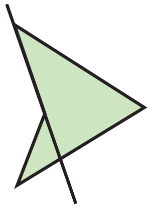


Рис. 1.12

Теорема 1.1

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Доказательство

На рисунке 1.13 изображён выпуклый n-угольник $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$. Все его диагонали, выходящие из вершины A_1, разбивают данный многоугольник на $n-2$ треугольника. Сумма всех углов этих треугольников равна сумме углов n-угольника. Поскольку сумма углов каждого треугольника равна $180°$, то искомая сумма равна $180°(n-2)$. ■

Отметим, что эта теорема справедлива и для невыпуклого многоугольника.

На рисунке 1.14 изображён выпуклый n-угольник $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$. Угол 1 является смежным с углом 2 многоугольника. Угол 1 называют **внешним углом** при вершине A_1 выпуклого многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$.

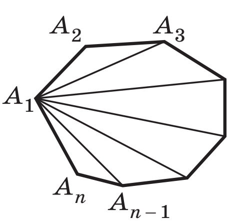


Рис. 1.13

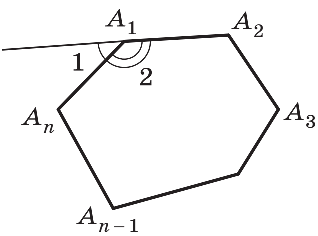


Рис. 1.14

Теорема 1.2

Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$.

Доказательство

Сумма угла многоугольника и угла, смежного с ним, равна $180°$. Поэтому сумма всех углов многоугольника и внешних углов многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $180°n$. По теореме 1.1 сумма углов многоугольника равна $180°(n - 2)$. Поэтому сумма внешних углов равна $180°n - 180°(n - 2) = 360°$. ■

В курсе геометрии 7 класса вы изучали свойства треугольников. В этом параграфе мы будем изучать свойства другого вида многоугольника — четырёхугольника (рис. 1.15, 1.16).

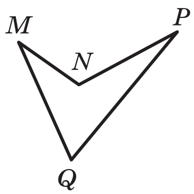


Рис. 1.15

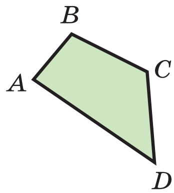


Рис. 1.16

Ясно, что все понятия, введённые для n-угольника, относятся и к четырёхугольнику.

В четырёхугольнике несоседние стороны и несоседние вершины называют соответственно **противолежащими сторонами** и **противолежащими вершинами**. На рисунке 1.15 изображён четырёхугольник, у которого, например, стороны NP и MQ противолежащие, вершины M и P противолежащие.

Углы ABC и ADC называют **противолежащими углами** четырёхугольника $ABCD$ (рис. 1.16). Также противолежащими являются углы BAD и BCD.

Задача 1. Докажите, что любой выпуклый n-угольник имеет не более трёх острых углов.

Решение. Пусть выпуклый n-угольник имеет четыре острых угла. Тогда сумма внешних углов, соответствующих этим острым углам, больше $360°$, что противоречит теореме 1.2. ■

Задача 2. Докажите, что количество диагоналей n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$, где $n \in \mathbf{N}$, $n > 3$.

Решение. Из одной вершины n-угольника можно провести $(n - 3)$ диагонали (нельзя провести диагонали в саму выбранную вершину и в две соседние вершины). Так как имеем n вершин, то, казалось бы, общее количество диагоналей равно $n(n - 3)$. Но при таком способе подсчёта каждую диагональ учли дважды. Следовательно, количество диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$. ■

Задача 3. Докажите, что длина любой стороны четырёхугольника меньше суммы длин трёх других его сторон.

Решение. Рассмотрим произвольный четырёхугольник $ABCD$ (рис. 1.17). Покажем, например, что $AB < AD + DC + CB$.

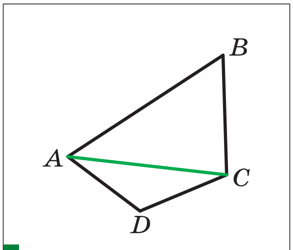


Рис. 1.17

Проведём диагональ AC. Применяя неравенство треугольника для сторон AB и AC соответственно треугольников ABC и ADC, получаем неравенства $AB < AC + CB$, $AC < AD + DC$.

Отсюда $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Следовательно, $AB < AD + DC + CB$. ■

Задача 4. Можно ли выпуклый 32-угольник разрезать на 20 треугольников, три выпуклых четырёхугольника и один выпуклый пятиугольник?

Решение. Очевидно, что сумма углов данного 32-угольника не больше суммы углов всех многоугольников, на которые он разрезан. Тогда имеем:

$180° \cdot (32 - 2) \leqslant 20 \cdot 180° + 3 \cdot 180° \cdot (4 - 2) + 180° \cdot (5 - 2)$;

$30 \leqslant 29$.

Получили противоречие. Следовательно, таким образом разрезать выпуклый 32-угольник невозможно. ■

?

1. Объясните, какие отрезки называют соседними.
2. Объясните, какую фигуру называют многоугольником.
3. Что называют периметром многоугольника?
4. Какой многоугольник называют выпуклым?
5. Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника?
6. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?

Упражнения

1.1. Найдите сумму углов выпуклого: 1) пятиугольника; 2) восьмиугольника; 3) двадцатичетырёхугольника.

1.2. Найдите сумму углов выпуклого: 1) девятиугольника; 2) шестнадцатиугольника.

1.3. Существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна: 1) 1800°; 2) 720°; 3) 1600°?

1.4. Существует ли многоугольник, каждый угол которого равен: 1) 150°; 2) 100°?

1.5. Один из углов четырёхугольника в 2 раза меньше второго угла, на 20° меньше третьего и на 40° больше четвёртого. Найдите углы четырёхугольника.

1.6. Найдите углы четырёхугольника, если они пропорциональны числам 2, 3, 10 и 21. Является ли этот четырёхугольник выпуклым?

1.7. Найдите углы четырёхугольника, если три его угла пропорциональны числам 4, 5 и 7, а четвёртый угол равен их полусумме. Является ли этот четырёхугольник выпуклым?

1.8. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, а диагональ BD образует с этими сторонами равные углы. Докажите, что стороны CD и AD равны.

1.9. Сколько диагоналей можно провести: 1) в девятиугольнике; 2) в двадцатиугольнике?

1.10. В треугольнике ABC $\angle A = 44°$, $\angle B = 56°$. Биссектрисы AK и BM треугольника пересекаются в точке O. Найдите углы четырёхугольника: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

1.11. В треугольнике ABC $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$. Высоты AE и BF треугольника пересекаются в точке H. Найдите углы четырёхугольника: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

1.12. Найдите диагональ четырёхугольника, если его периметр равен 80 см, а периметры треугольников, на которые эта диагональ разбивает данный четырёхугольник, равны 36 см и 64 см.

1.13. Могут ли стороны четырёхугольника быть равными:
1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?

◆ ◆

1.14. Три угла выпуклого многоугольника равны по 100°, а остальные — по 120°. Определите количество сторон многоугольника.

1.15. Докажите, что если углы выпуклого шестиугольника равны, то его стороны образуют три пары параллельных сторон.

1.16. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C = 90°$. Докажите, что биссектрисы двух других углов четырёхугольника либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

1.17. Докажите, что если биссектрисы двух противолежащих углов выпуклого четырёхугольника параллельны или лежат на одной прямой, то два других угла четырёхугольника равны.

1.18. Постройте четырёхугольник по его сторонам и одному из углов.

1.19. Постройте четырёхугольник по трём сторонам и двум диагоналям.

1.20. Постройте четырёхугольник по его сторонам и одной из диагоналей.

1.21. Сумма углов выпуклого n-угольника и одного из его внешних углов равна $990°$. Найдите n.

1.22. Можно ли выпуклый семнадцатиугольник разрезать на 14 треугольников?

1.23. Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполняется неравенство $AC + BD > AB + CD$.

1.24. Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике сумма диагоналей меньше периметра, но больше полупериметра четырёхугольника.

1.25. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по углам A и B, сторонам AB и BC и сумме сторон AD и CD.

1.26. Серединные перпендикуляры сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, принадлежащей стороне AD. Докажите, что если $\angle A = \angle D$, то диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны.

1.27. Вершины выпуклого пятиугольника соединены через одну (рис. 1.18). Найдите сумму углов при вершинах полученной «звезды».

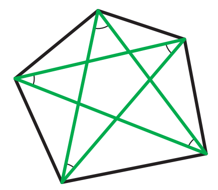


Рис. **1.18**

1.28. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D — в точке N. Известно, что $MN \perp AB$. Докажите, что углы A и B равны.

1.29. Градусная мера каждого из углов выпуклого девятнадцатиугольника кратна $10°$. Докажите, что в этом девятнадцатиугольнике есть пара параллельных сторон.

1.30. Выпуклый n-угольник можно разрезать на несколько равносторонних треугольников. Найдите наибольшее значение n.

1.31. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать на равнобедренные треугольники.

1.32. В четырёхугольнике $ABCD$ сумма углов ABD и BDC равна $180°$, а стороны AD и BC равны (рис. 1.19). Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

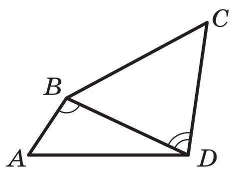


Рис. **1.19**

1.33. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных наибольшей диагонали?

§ 2 Параллелограмм. Свойства параллелограмма

Определение

Параллелограммом называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны.

На рисунке 2.1 изображён параллелограмм $ABCD$. По определению параллелограмма имеем: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

Теорема 2.1

Противолежащие стороны параллелограмма равны.

Доказательство

На рисунке 2.1 изображён параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $AB = CD$ и $BC = AD$.

Проведём диагональ AC. Докажем, что треугольники ABC и CDA равны (рис. 2.2).

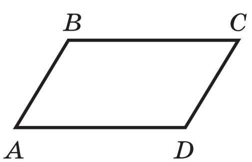


Рис. 2.1

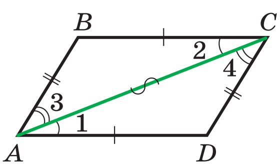


Рис. 2.2

В этих треугольниках сторона AC — общая, углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, углы 3 и 4 равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. Следовательно, треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$ и $BC = AD$. ■

Теорема 2.2

Противолежащие углы параллелограмма равны.

Доказательство

На рисунке 2.1 изображён параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $\angle B = \angle D$ и $\angle A = \angle C$.

При доказательстве предыдущей теоремы было установлено, что $\triangle ABC = \triangle CDA$ (рис. 2.2). Отсюда $\angle B = \angle D$. Из равенства углов 1 и 2 и равенства углов 3 и 4 следует, что $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Следовательно, $\angle BAD = \angle BCD$. ■

Теорема 2.3

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство

На рисунке 2.3 изображён параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажем, что $AO = OC$ и $BO = OD$.

Рассмотрим треугольники AOD и COB. Имеем: $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD соответственно. Из теоремы 2.1 получаем: $AD = BC$. Следовательно, треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AO = OC$, $BO = OD$. ■

Определение

Высотой параллелограмма называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противолежащую сторону.

На рисунке 2.4 каждый из отрезков AF, QE, BM, PN, CK является высотой параллелограмма $ABCD$.

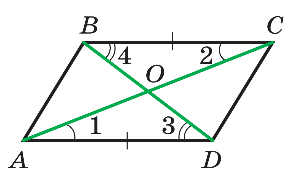


Рис. 2.3

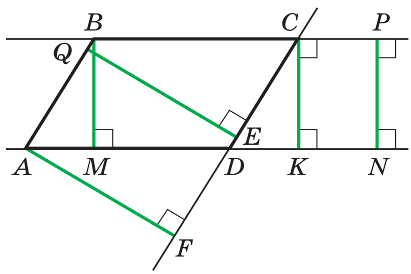


Рис. 2.4

Из курса геометрии 7 класса вы знаете, что все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от второй прямой. Поэтому $AF = QE$ и $BM = PN = CK$.

Говорят, что **высоты** BM, CK и PN **проведены к сторонам** BC и AD, а высоты AF и QE — к сторонам AB и CD.

Теорема 2.4

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Доказательство

Через каждую вершину данного треугольника ABC проведём прямую, параллельную противолежащей стороне. Получим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 2.5).

Из построения следует, что четырёхугольники AC_1BC и $ABCB_1$ — параллелограммы. Отсюда $AC_1 = BC = AB_1$. Следовательно, точка A является серединой отрезка B_1C_1.

Поскольку прямые B_1C_1 и BC параллельны, то высота AH треугольника ABC перпендикулярна отрезку B_1C_1. Таким образом, прямая AH — серединный перпендикуляр стороны B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично можно доказать, что прямые, содержащие две другие высоты треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами сторон C_1A_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Так как серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке, то утверждение теоремы доказано. ■

Точку, в которой пересекаются прямые, содержащие высоты треугольника, называют **ортоцентром** треугольника.

Задача 1. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит сторону в отношении 2 : 1, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 60 см.

Решение. Пусть биссектриса тупого угла B параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.6) пересекает сторону AD в точке M. По условию $AM : MD = 2 : 1$.

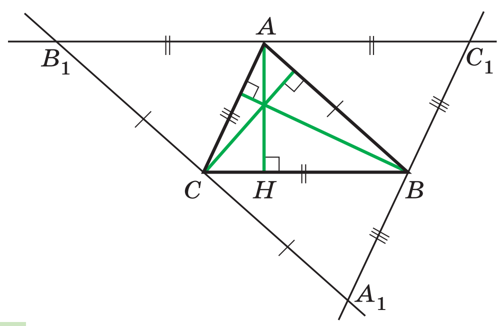


Рис. 2.5

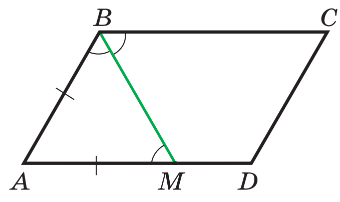


Рис. 2.6

Углы ABM и CBM равны по условию.

Углы CBM и AMB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BM.

Тогда $\angle ABM = \angle AMB$. Следовательно, треугольник BAM равнобедренный, отсюда $AB = AM$.

Пусть $MD = x$ см, тогда $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Поскольку противолежащие стороны параллелограмма равны, то его периметр равен $2(AB + AD)$. Учитывая, что по условию периметр параллелограмма равен 60 см, получаем:

$$2(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

Следовательно, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.

Ответ: 12 см, 18 см. ■

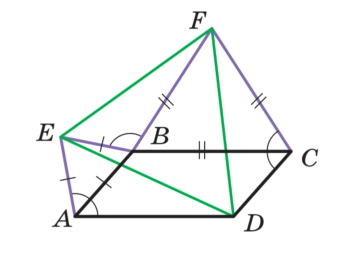


Рис. **2.7**

Задача 2. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABE и BCF (рис. 2.7). Докажите, что треугольник EDF равносторонний.

Решение. Пусть $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle EAD = \angle FCD = 60° + \alpha$.

Имеем: $\angle EBA = \angle FBC = 60°$, $\angle ABC = 180° - \alpha$. Тогда $\angle EBF = 360° - (60° + 60° + 180° - \alpha) = 60° + \alpha$.

Запишем: $EB = EA = AB = DC$, $BF = FC = BC = AD$. Следовательно, треугольники AED, CDF и BEF равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства этих треугольников следует, что $ED = FD = EF$. ■

?

1. Какой четырёхугольник называют параллелограммом?
2. Каким свойством обладают противолежащие стороны параллелограмма?
3. Каким свойством обладают противолежащие углы параллелограмма?
4. Каким свойством обладают диагонали параллелограмма?
5. Что называют высотой параллелограмма?
6. Сформулируйте теорему о прямых, содержащих высоты треугольника.