Предисловие

Эта книга — для учеников 9-го класса. В ней выделены те части курса алгебры, которые можно назвать алгебраическими умениями. Из всего курса в книгу вошли ответы не на вопрос «Что ты знаешь?», а на вопрос «Что ты умеешь делать?». Ведь бывает так, что ученик знает, что такое квадратные уравнения, но не умеет их решать.

Текст этой книги — с пропусками. Нужно заполнять их и проверять правильность работы по Ключу, имеющемуся в самом конце книги. А если вы допустили ошибки, то необходимо их исправить. Для чего и следует заполнять пропуски мягким карандашом, чтобы можно было легко стирать неверные записи.

В тексте имеются задания, которые следует выполнять сразу, во время чтения, после чего необходимо проверять свои решения с теми, которые даны после каждого пункта.

Глава 1

Как строить графики

Наш выдающийся соотечественник академик Павел Сергеевич Александров (1896—1982) говорил, что школьная алгебра состоит из четырёх частей: 1) числа и вычисления; 2) алгебраические ____________________; 3) функции и ________________________; 4) уравнения и ________________________. Нужно заметить, что именно в 9-м классе первое из этих направлений не получает нового ____________________: вы по-прежнему остаётесь в множестве действительных ____________ — тех чисел, которые моделируются точками координатной ____________. К этому добавляется лишь более строгий подход к превращению в обыкновенные дроби периодических десятичных ____________. Зато остальные три направления получают в 9-м ______________ существенное развитие. Появляются новые выражения: корни произвольной натуральной ______________, а также степени с произвольным ____________ показателем; завершается исследование ____________________ элементарными средствами, вводится новый вид функций — функции с натуральной областью определения, то есть числовые ____________________________; решаются новые виды уравнений и ________________________, а само понятие неравенства получает более строгое математическое ________________________.

Нужно заметить, что в 9-м классе среди четырёх направлений школьной ____________________ особое внимание уделяется функциональному направлению. Каждая глава курса буквально пронизана функциональным ________________________. Можно сказать, что хорошее знание ____________________ и графиков является столь же важным средством постижения всего курса, как, например, умение производить арифметические ____________________. Но арифметические вычисления можно выполнить с помощью ____________________________, а строить графики в вашей тетради должны вы сами.

Первая из двух основных тем этой книги связана с умением строить графики.

Есть и вторая тема, доставляющая много неприятностей школьникам, — решение текстовых задач.

Начнём с первой. Давайте повторим то, что вы должны уже знать о функциях и графиках из прежних ________ обучения.

Вы изучали четыре вида графиков (рис. 1—4): 1) прямая линия; 2) ____________________; 3) гипербола; 4) ____________________.

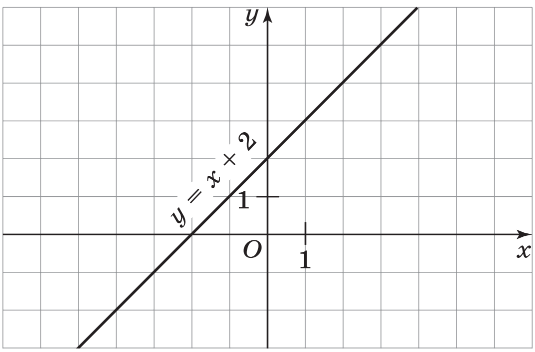


Рис. 1

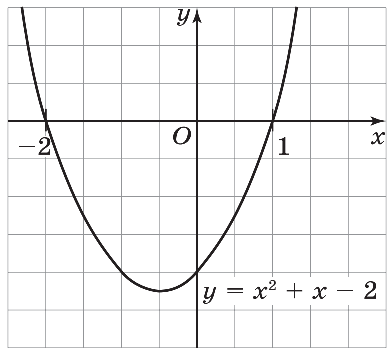


Рис. 2

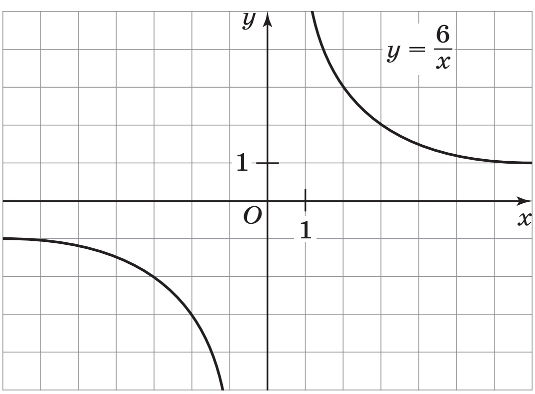


Рис. 3

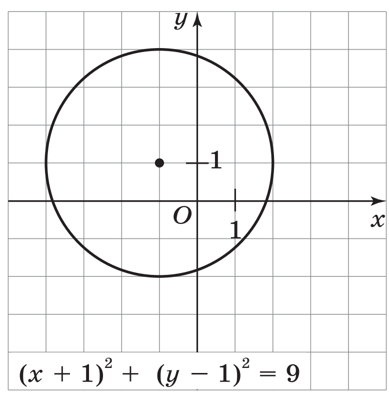


Рис. 4

Уравнение прямой имеет такой вид: $ax + by + c =$ ___, где коэффициенты a и ___ не могут равняться нулю одновременно[1]. Если ________ $= 0$ (и, значит, $a \neq 0$), то прямая перпендикулярна оси ________________. Важно заметить, что такая прямая не может быть графиком функции $y = f(x)$, так как уравнение в этом случае имеет вид $ax + 0 \cdot y + c = 0$, и одному и тому же значению $x = -\frac{c}{a}$ соответствует бесконечно много разных значений ___.

Задание 1. Поясните смысл последней фразы на примере уравнения $2x + 7 = 0$. Постройте график этого уравнения. ◄

Если $b \neq 0$, то уравнение $ax + by + c = 0$ равносильно уравнению $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, или, в общепринятой записи, $y = ax + b$. Последнее уравнение задаёт функцию, которая называется ____________________ функцией.

Задание 2. Постройте графики уравнений:
а) $2y + 7 = 0$; б) $-x + y + 5 = 0$. ◄

Подставим в уравнение линейной функции $y = ax + b$ вместо x число 0. Получим, что тогда $y =$ ___. Значит, прямая $y = ax + b$ проходит через точку (0; ___). Теперь подставим в уравнение линейной функции $y = ax + b$ вместо x число 1. Получим, что тогда $y =$ ______. Значит, прямая $y = ax + b$ проходит через точку с координатами (1; ___ $+ b$).

Графиком линейной функции $y = ax + b$ является ______________, проходящая через точки с координатами (0; ___) и (1; ______).

Задание 3. Напишите уравнения графиков, представленных на рисунках 5—7 (см. с. 7). ◄

На вопрос, как строить график линейной функции, мы ответим так: по любым ____________ точкам, помещающимся на чертеже;

[1] Это доказано в курсе геометрии 8-го класса.

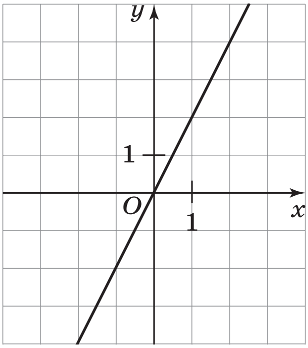


Рис. 5

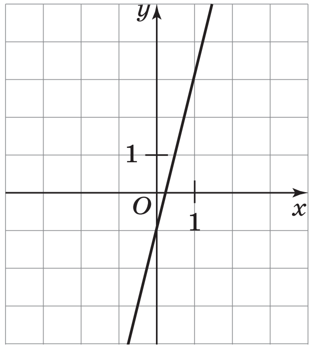


Рис. 6

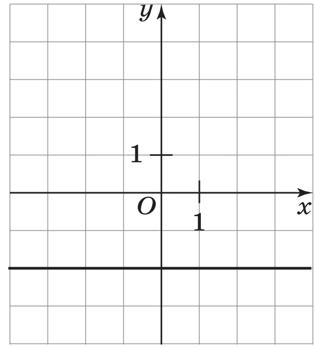


Рис. 7

особенно удобно это делать по точкам с координатами (___; b) и (___; $a + b$).

Задание 4. Постройте графики уравнений: а) $20x + 15y = 30$; б) $2x + 3y = 6$; в) $y = 1{,}5$; г) $y = -x$; д) $y = 0{,}3x + 2$. ◀

Уравнение параболы. Парабола симметрична относительно некоторой прямой, перпендикулярной оси ___________; вершина параболы лежит на этой ___________. Уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 +$ ______ $+$ ___, где $a \neq 0$, причём все параболы с одинаковым старшим коэффициентом ___ могут быть совмещены параллельным переносом с параболой $y = ax^2$ (рис. 8).

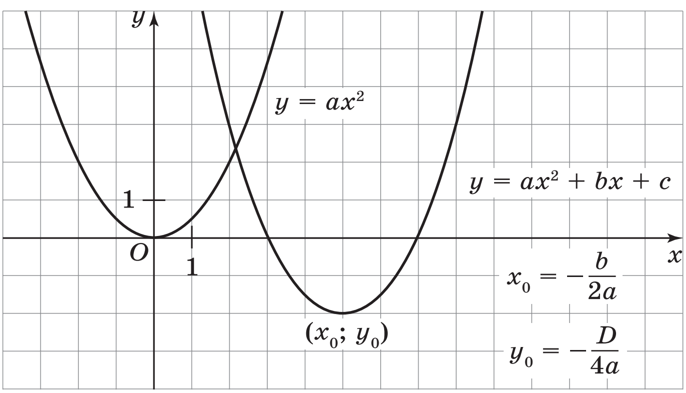
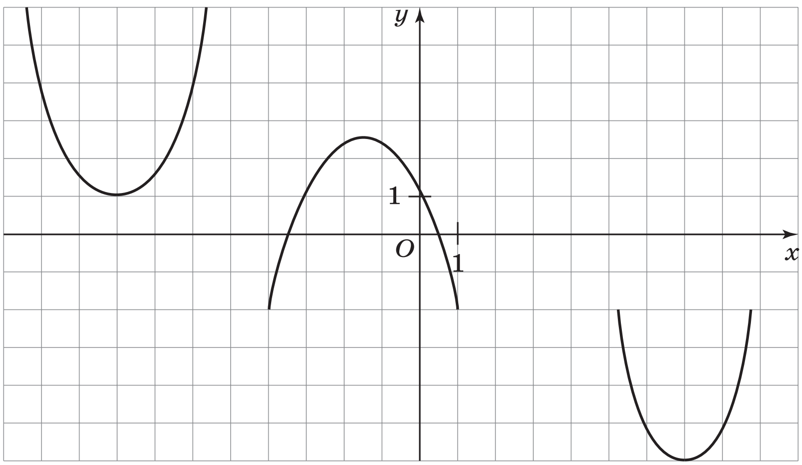


Рис. 8

Таким образом, все параболы, уравнения которых имеют одинаковый старший коэффициент ___, равны между собой, и их ветви одинаково направлены (если a положителен, то ветви направлены __________, если же a отрицателен, то ветви __________________________ вниз).

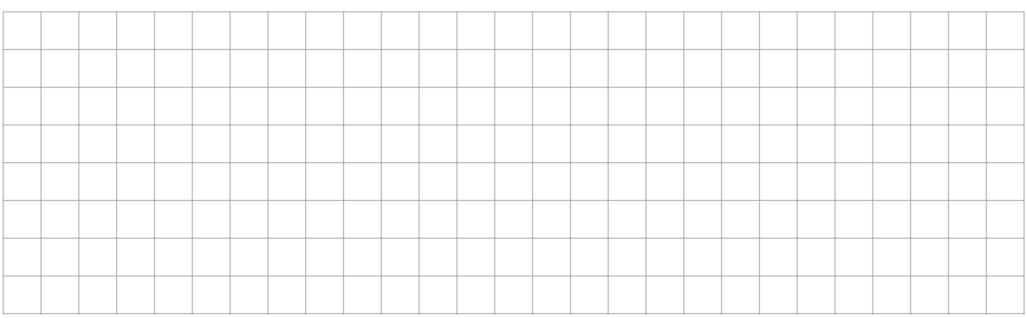
Задание 5. Среди данных парабол (рис. 9) выберите такие, уравнения которых имеют положительный старший коэффициент. ◀



а *б* *в*

Рис. 9

Задание 6. Постройте параболу $y = 0{,}5x^2$. Постройте параболу, равную параболе $y = 0{,}5x^2$, с вершиной в точке $(3; -1)$. ◀



Положение параболы на координатной ____________________________ зависит от значений коэффициента b и свободного члена c в уравнении $y = ax^2 + bx + c$. Так, значение c всегда равно ординате точки, в которой парабола пересекает ось _____.

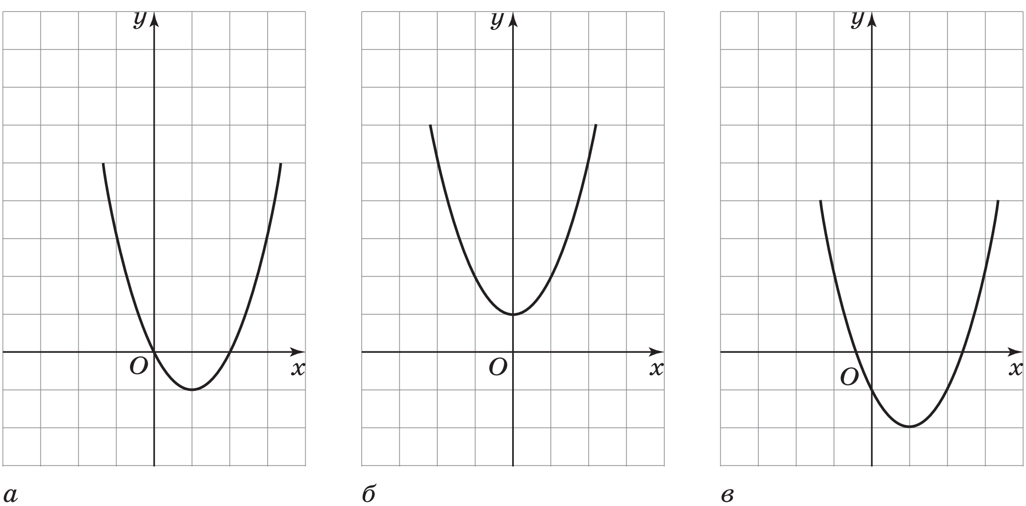
Задание 7. Объясните последнее утверждение. ◀

Легко распознаются случаи, когда b или c __________ нулю. Если $c = 0$, то парабола проходит через начало ____________________.

Задание 8. Объясните последнее утверждение. ◀

Если $b = 0$, то парабола симметрична относительно оси ____________________, а значит, вершина параболы лежит на оси ____________________.

Задание 9. Среди парабол, представленных на рисунке 10, выберите такие, у которых один из коэффициентов b или c равен нулю. Какой именно в каком случае? ◀



а *б* *в*

Рис. 10

Бывает, что квадратичная функция задаётся уравнением вида $y = a(x - m)(x - n)$. Тогда построение параболы удобно начинать с точек с координатами $(m; 0)$ и (___; 0). Затем строится вершина параболы с абсциссой $\frac{m+n}{2}$ и т. д.

Задание 10. Постройте график уравнения $y = 2(x - 3)(x + 2)$. ◄

И только если парабола не симметрична относительно оси ____________________ и не проходит через _____________ координат, то её уравнение имеет все три коэффициента, не равные нулю.

В общем случае вершина параболы имеет абсциссу $x_0 =$ _____. Её ордината может быть найдена по формуле $y_0 = -\frac{D}{4a}$, где $D = b^2 - 4ac$, или подстановкой x_0 в формулу $y_0 = ax_0^2 +$ _____ + ___.

Задание 11. Найдите координаты вершины параболы $y = x^2 - x + 1$. Постройте эту параболу.

Итак, на вопрос, как строить график квадратичной ______________ __________, мы ответим так.

График функции $y = ax^2$ строится по точкам от начала __________ ____________. Это ____________________ с вершиной в точке (___; ___), проходящая через точки $(1; a)$ и $(-1;$ ___$)$.

График функции $y = ax^2 + c$ строится переносом графика $y =$ ______ на ___ единиц вдоль оси ординат; это парабола с вершиной в точке $(0;$ ___$)$, проходящая через точки $(1; a + c)$ и (___; $a + c$).

График функции $y = ax^2 + bx$ строится, начиная с точек $(0;$ ___$)$ и $\left(-\frac{b}{a};\ \_\_\_\right)$ и вершины параболы с абсциссой ___ $= -\frac{b}{2a}$.

График функции $y = a(x - m)(x - n)$ строится, начиная с точек $(m; 0)$ и (___; 0) и вершины параболы с абсциссой $x_0 =$ _____.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ строится, начиная с вершины параболы с абсциссой $x_0 =$ _____; от этой вершины строится парабола $y =$ _____.

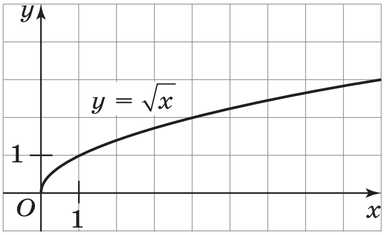


Рис. 11

График функции $y = \sqrt{x}$ — это половина параболы $x =$ ___, взятой при неотрицательных ___ (рис. 11).

Задание 12. Постройте графики функций $y = \sqrt{2x}$ и $y = 2\sqrt{x}$.

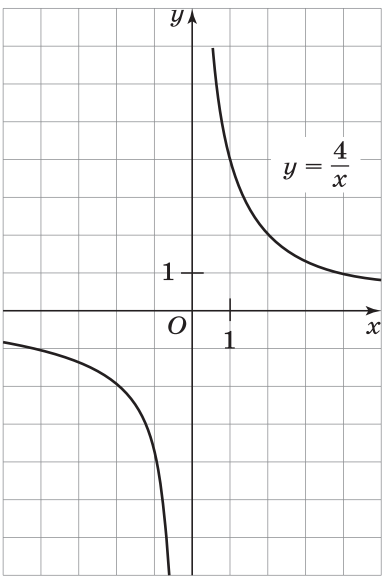


Рис. 12

Уравнение гиперболы. Гипербола состоит из двух ____________, неограниченно приближающихся к двум пересекающимся прямым (асимптотам гиперболы). Указанные асимптоты параллельны координатным __________ (рис. 12).

В частности, у гиперболы $y = \frac{k}{x}$ асимптотами являются сами оси координат. Такая гипербола проходит через точки $(1;\ k)$ и $(-1;\ -k)$, она симметрична относительно ____________ координат.

Уравнение $y = \frac{k}{x}$ называется уравнением обратной ______________________
______________.

Задание 13. Постройте график функции $y = -\dfrac{1}{2x}$. ◀

Для построения графика дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где $c \neq$ ____ и $ad \neq$ ____, сначала в системе координат строят вертикальную асимптоту $x =$ ______ и горизонтальную асимптоту $y =$ ______ (пунктирные линии на рис. 13). Затем строят несколько опорных точек (не менее трёх для каждой ветви) и проводят гиперболу.

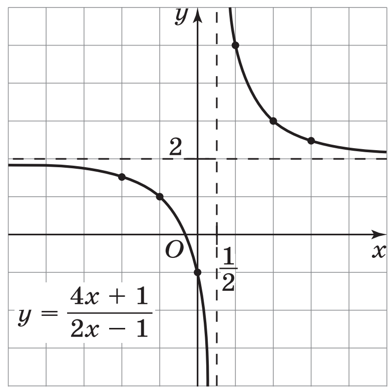


Рис. 13

Задание 14. Постройте график функции $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$. ◀

Уравнение окружности. Окружность с центром в точке с координатами $(a;\ b)$ и радиусом r описывается уравнением $(x - \underline{\qquad})^2 + (y - \underline{\qquad})^2 = \underline{\qquad}$. В частности, уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ — это уравнение окружности радиусом ____ с центром в ____________________ ______________________________.

Задание 15. Заполните таблицу на с. 15. ◀

Задание 16. Решите уравнения:

а) $(y - 2x + 3)(y - x^2 + 2x - 1)\left(y + \dfrac{1}{x}\right)\left(y + \sqrt{x}\right) = 0;$

б) $(y - 2x + 3)^2 + (y - x^2 + 2x - 1)^4 + \left(y + \dfrac{1}{x}\right)^6 + \left(y + \sqrt{x}\right)^8 = 0.$ ◀

Задание 17. Постройте график дробно-квадратичной функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$. ◀