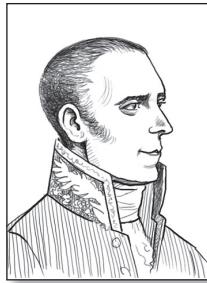


Глава 4

Решение уравнений и неравенств высших степеней

§ 1. Развитие понятия корня

4.1.1. Корни высших степеней



Индукция, аналогия гипотез, основанных на фактах и беспрестанно проверяемых новыми наблюдениями, счастливый природный талант, подкреплённый частым сравниванием их указаний с опытом, — таковы главные средства достижения истины.

П.-С. Лаплас (1749–1827),
французский математик, физик, астроном.

В восьмом классе мы познакомились с арифметическим квадратным корнем. Он определяется как *неотрицательное* число, квадрат которого равен данному *неотрицательному* числу, а также со свойствами арифметического квадратного корня.

Однако для практических нужд введения квадратного корня из числа явно недостаточно. В этом пункте мы познакомимся с новыми математическими понятиями, связанными с числами.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача.

Какие размеры должен иметь аквариум кубической формы, объём которого равен 50 литрам?

Решение.

Приведём в соответствие единицы измерения величин: $50 \text{ л} = 50 \text{ дм}^3$. Приняв длину стороны куба равной x (дм), получим уравнение $x^3 = 50$. Корнем данного уравнения является число, куб которого равен 50. Решение этого уравнения приводит нас к понятию *кубического* корня. Введём соответствующее определение.

Определение 1. *Кубическим корнем* из действительного числа a называется такое действительное число x , что $x^3 = a$ (обозначается $x = \sqrt[3]{a}$).

При этом неотрицательность числа a уже не требуется, так как куб действительного числа может принимать не только положительные, но и отрицательные значения.

Поэтому $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{-1} = -1$ (так как $1^3 = 1$, $(-1)^3 = -1$); $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$, $\sqrt[3]{-0,001} = -0,1$, $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$ и т. д. Конечно же, $\sqrt[3]{0} = 0$.

Вернёмся к решению задачи об аквариуме. Ответ к ней можно записать как $\sqrt[3]{50}$. Заметим, что это число не является рациональным.

Кубический корень называют иначе корнем *третьей* степени, а арифметический квадратный корень из числа — корнем *второй* степени. Аналогично можно определить и корень любой степени $n \geq 2$. При этом корни чётной степени ($n = 2, 4, 6, 8, \dots$) и корни

Глава 4, §1, п.4.1.1

нечётной степени ($n = 3, 5, 7, 9, \dots$) определяются по-разному (аналогично определениям квадратного и кубического корней).

Определение 2. Пусть $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ — чётное натуральное число. *Арифметическим корнем n -й степени из неотрицательного числа a* называется неотрицательное число x такое, что $x^n = a$ (обозначается $x = \sqrt[n]{a}$).

При записи знакомого нам арифметического корня второй степени, как мы помним, пишут не $\sqrt[2]{a}$, а просто \sqrt{a} , опуская двойку. Иногда знак $\sqrt{}$ называют *радикалом* (от латинского слова radix — корень).

Так как любое действительное число после возведения в чётную степень даёт неотрицательный результат, то определять корень чётной степени из отрицательного числа не имеет смысла. А вот уравнение $x^n = a$ при $a > 0$ и чётном n наряду с положительным имеет и отрицательное решение. Например, уравнение $x^4 = 16$ имеет решения $x = 2$ и $x = -2$, так как $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$. Поэтому для однозначности определения корня имеет смысл ограничиться положительным значением, то есть ввести понятие *арифметического корня*. Таким образом, при определении арифметического корня чётной степени все происходит так же, как при определении арифметического квадратного корня.

Приведём примеры арифметических корней чётной степени: $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[4]{64} = 2$, $\sqrt[4]{1} = 1$, $\sqrt[4]{1} = 1$, $\sqrt[4]{6561} = 3$, $\sqrt[4]{0,0001} = 0,1$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Выражение $\sqrt[6]{4}$ задаёт действительное, не являющееся рациональным, число, шестая степень которого равна 4. А, например, выражение $\sqrt[4]{-81}$ не имеет смысла.

Определение 3. Пусть $n = 3, 5, 7, 9\dots$ — нечётное натуральное число. *Корнем n -й степени из действительного числа a* называется действительное число x такое, что $x^n = a$ (обозначается $x = \sqrt[n]{a}$)¹.

Приведем примеры корней нечётной степени: $\sqrt[3]{32} = 2$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[5]{-1} = -1$, $\sqrt[5]{-128} = -2$, $\sqrt[5]{512} = 2$, $\sqrt[5]{243} = 3$, $\sqrt[5]{-1024} = -4$, $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$, $\sqrt[5]{-0,00001} = -0,1$, $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$.

В дальнейшем мы не будем добавлять слово «арифметический» к корню n -й степени. Всегда будем иметь в виду, что корень чётной степени из неотрицательного числа принимает неотрицательное значение, а корень нечётной степени из действительного числа принимает значение того же знака, что и само число. Существование корня n -й степени во всех этих случаях примем без доказательства (как и для квадратного корня). Отметим, что во всех этих случаях значение корня n -й степени единственno.

* * *

Докажем единственность значения корня n -й степени (аналогично тому, как доказывалась единственность квадратного корня). Сначала докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Функция $y = x^n$ строго возрастает на $[0; +\infty)$ при чётном натуральном n и строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ при нечётном натуральном n .

Доказательство.

Докажем методом математической индукции, что если $x_1 > x_2 > 0$, то $x_1^n > x_2^n$ при любом натуральном n . При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение доказано при фиксированном натуральном n ; докажем его для следующего значения $n + 1$. Пусть $x_1 > x_2 > 0$; тогда по

¹ Если $a \geq 0$, то соответствующее значение x называется арифметическим корнем n -й степени из a .

предположению индукции $x_1^n > x_2^n$. Вспомним известное свойство числовых неравенств: если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$. Так как $x_1 > x_2 > 0$ и $x_1^n > x_2^n > 0$, то $x_1 \cdot x_1^n > x_2 \cdot x_2^n$, то есть $x_1^{n+1} > x_2^{n+1}$. Утверждение доказано при любом натуральном n методом математической индукции.

Ясно, что если $x > 0$, то и $x^n > 0$; если $x = 0$, то и $x^n = 0$. Поэтому если $x_1 > x_2 \geq 0$, то $x_1^n > x_2^n \geq 0$ при любом натуральном n .

Значит, функция $y = x^n$ строго возрастает на $[0; +\infty)$ при любом натуральном n ; при чётном n требуемое утверждение доказано.

Пусть теперь n — нечётное, и $x_1 > x_2$. Если $x_1 > x_2 \geq 0$, то $x_1^n > x_2^n \geq 0$ (уже доказано). Если $0 \geq x_1 > x_2$, то $-x_2 > -x_1 \geq 0$. По доказанному выше, $(-x_2)^n > (-x_1)^n$, т.е. $-x_2^n > -x_1^n$, и окончательно, $x_1^n > x_2^n$. Наконец, если $x_1 > 0 > x_2$, то $x_1^n > 0$, $x_2^n < 0$, и $x_1^n > x_2^n$. При любом расположении точек x_1 и x_2 на числовой прямой при условии $x_1 > x_2$ выполняется неравенство $x_1^n > x_2^n$. Значит, при нечётном натуральном n функция $y = x^n$ строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$. ■

Теорема 2. Значение $\sqrt[n]{a}$ при чётном натуральном n единственно для любого $a \geq 0$. Значение $\sqrt[n]{a}$ при нечётном натуральном n единственно для любого $a \in \mathbf{R}$.

Доказательство.

Пусть существуют два различных значения x_1 и x_2 для $\sqrt[n]{a}$, для определённости $x_1 > x_2$ ($x_1 > x_2 \geq 0$ для чётного n ; для нечётного n знаки чисел x_1 и x_2 роли не играют). Тогда, по предыдущему утверждению, $x_1^n > x_2^n$. Но $x_1^n = x_2^n = a$; полученное противоречие доказывает, что значение $\sqrt[n]{a}$ единственно. ■

Приведем основные свойства корней.

I. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (при любых a, b , если n нечётно; при $a, b \geq 0$, если n чётно).

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Тогда $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$ (из определения корня следует, что $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $(\sqrt[n]{b})^n = b$). Так как $x^n = a \cdot b$, то $x = \sqrt[n]{ab}$ (это следует из единственности корня n -й степени). Итак, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. ■

II. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (при любых $a, b \neq 0$, если n нечётно; при $a \geq 0, b > 0$, если n чётно).

Доказательство.

Пусть $x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Тогда $x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$. Так как $x^n = \frac{a}{b}$, то $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (это следует из единственности корня n -й степени). Итак, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. ■

Свойства I и II аналогичны таким же свойствам квадратного корня.

Напомним, что $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$ при любых натуральных k ; при чётных k модуль можно не писать, так как $a^k \geq 0$, и $\sqrt{a^{2k}} = a^k$. Аналогичное свойство имеет место для корней произвольной степени:

III. $\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k$ при $n, k \in \mathbf{N}$ (n — нечётно) и любых $a \in \mathbf{R}$;

$\sqrt[n]{a^{kn}} = |a|^k$ при $n, k \in \mathbf{N}$ (n — чётно) и любых $a \in \mathbf{R}$; (в частности, при чётных k и n : $\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k$).

Доказательство.

Пусть n — нечётное натуральное число, $x = a^k$. Тогда $(a^k)^n = a^{kn}$. Так как $x^n = a^{kn}$, то $x = \sqrt[n]{a^{kn}}$ (это следует из единственности корня n -й степени). Итак, $a^k = \sqrt[n]{a^{kn}}$.

Глава 4, §1, п.4.1.1

Пусть теперь n — чётное натуральное число, $x = |a^k|$. Тогда $(|a^k|)^n = (|a|^k)^n = |a|^{kn} = a^{kn}$ (здесь учтена чётность числа kn). Так как $x^n = a^{kn}$, и $x \geq 0$, то $x = \sqrt[n]{a^{kn}}$ (это следует из единственности корня n -й степени). Итак, $|a^k| = \sqrt[n]{a^{kn}}$. ■

Рассмотрим примеры применения этих свойств.

Пример 1.

Упростить: а) $\sqrt[4]{a^8}$; $\sqrt[3]{a^6}$; $\sqrt[3]{a^9}$; $\sqrt[4]{a^{12}}$; $\sqrt[6]{a^{30}}$; б) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$; в) $\frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{a^2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{a^8} = a^2$; $\sqrt[3]{a^6} = a^2$; $\sqrt[3]{a^9} = a^3$; $\sqrt[4]{a^{12}} = |a^3|$; $\sqrt[6]{a^{30}} = |a^5|$ (по III свойству);

б) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$ (по I и III свойствам);

в) $\frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{a^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^6}{a^2}} = \sqrt[4]{a^4} = |a|$ (по II и III свойствам).

Извлечение корня степени m из корня степени n сводится к извлечению корня степени mn из исходного числа. Сформулируем это на математическом языке:

IV. $\sqrt[mn]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a}$ для любого $a \in R$, если m и n — нечётные натуральные числа. Если хотя бы одно из натуральных чисел m , n — чётно, то $\sqrt[mn]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ при всех $a \geq 0$.

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[mn]{\sqrt[n]{a}}$. Тогда $(x^{mn}) = (x^m)^n = \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a$. Так как $x^{mn} = a$, то $x = \sqrt[mn]{a}$ (это следует из единственности корня). Итак, $\sqrt[mn]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. ■

Пример 2.

Записать с помощью одного радикала: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}$; $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}$; $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a}}$.

Решение.

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$; $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[18]{a}$; $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[20]{a}$; $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[12]{a}$.

Замечание. Здесь и далее мы будем считать, что проводим преобразование при тех значениях переменной, при которых имеет смысл исходное выражение.

V. $\sqrt[kn]{a^k} = \sqrt[n]{a}$, если k — нечётное натуральное число (при всех $a \in R$, если n нечётно, и при $a \geq 0$, если n чётно); $\sqrt[kn]{a^k} = \sqrt[n]{|a|}$, если k — чётное натуральное число (при всех $a \in R$).

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[kn]{a^k}$. Тогда $x^n = (\sqrt[kn]{a^k})^n = \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n$ (по свойству IV). Далее, по определению корня n -й степени, $x^n = \sqrt[n]{a^k} = |a|$ при всех $a \in R$, если k чётно и, $\sqrt[n]{a^k} = a$ при всех $a \in R$, если k нечётно (это следует из свойства III, если в нём заменить k на 1, n на k). Из единственности корня следует теперь, что $x = \sqrt[n]{a}$, если k нечётно; $x = \sqrt[n]{|a|}$, если k чётно. ■

Пример 3.

Представить в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[6]{a^3}$; $\sqrt[25]{a^5}$; $\sqrt[12]{a^4}$; $\sqrt[16]{a^4}$.

Решение.

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ при всех $a \geq 0$; $\sqrt[25]{a^5} = \sqrt[5]{a}$ при всех $a \in R$; $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{|a|}$ при всех $a \in R$; $\sqrt[16]{a^4} = \sqrt[4]{|a|}$ при всех $a \in R$.

Следующее свойство обобщает свойства III и IV, оно аналогично сокращению дробей на общий множитель в числителе и знаменателе (для простоты мы будем рассматривать только случай $a \geq 0$, независимо от чётности или нечётности показателей степени и корня).

VI. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m, n \in N$.

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[nk]{a^{mk}}$. Тогда $x^n = (\sqrt[nk]{a^{mk}})^n = \sqrt[k]{a^{mk}} = a^m$ (это следует из определения корня и свойства III). Из единственности корня следует, что $x = \sqrt[n]{a^m}$. Итак, $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$. ■

Пример 4.

Представить в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[21]{a^{12}}$; $\sqrt[16]{a^{28}}$; $\sqrt[30]{a^{12}}$; $\sqrt[18]{a^{40}}$.

Решение.

Мы фактически сокращаем показатели степени корня и степени подкоренного выражения на общий множитель:

$$\sqrt[21]{a^{12}} = \sqrt[7 \cdot 3]{a^{4 \cdot 3}} = \sqrt[7]{a^4}; \quad \sqrt[16]{a^{28}} = \sqrt[4]{a^7}; \quad \sqrt[30]{a^{12}} = \sqrt[5]{a^2}; \quad \sqrt[18]{a^{40}} = \sqrt[9]{a^{20}}.$$

VII. Если $x_1 > x_2$ и n — нечётное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$; если $x_1 > x_2 \geq 0$ и n — чётное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$.

Пока примем это свойство без доказательства, оно будет доказано в пункте 4.1.4.

Данное свойство позволяет нам сравнивать корни высших степеней.

Пример 5.

Сравните числа: а) $\sqrt[3]{13}$ и $\sqrt[3]{103}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$; в) $\sqrt[4]{0,999}$ и 1.

Решение.

а) $\sqrt[3]{13} < \sqrt[3]{103}$, так как $13 < 103$ (по свойству VII корня n -й степени);

б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[6]{6}$. Значит, $\sqrt[3]{\sqrt{5}} < \sqrt{\sqrt[3]{6}}$, так как $\sqrt[6]{5} < \sqrt[6]{6}$ (по свойствам IV и VII корня n -й степени);

в) Можем записать $1 = \sqrt[4]{1^4} = \sqrt[4]{1}$. Значит, $\sqrt[4]{0,999} < 1$, так как $0,999 < 1$ (по свойству VII корня n -й степени).

Пример 6.

Сравните числа: а) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{11}$; в) $-\sqrt[4]{3}$ и $-\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$.

Решение.

а) Так как $(\sqrt[3]{5})^6 = 5^2 = 25$, а $(\sqrt{3})^6 = 3^3 = 27$, то $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$; $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$. Из неравенства $25 < 27$, следует $\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27}$, то есть $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$ (по свойству VII корня n -й степени);

б) Так как $(\sqrt{5})^6 = 5^3 = 125$, а $(\sqrt[3]{11})^6 = 11^2 = 121$, то $\sqrt{5} = \sqrt[6]{125}$; $\sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{121}$.

Но $125 > 121$, поэтому $\sqrt[6]{125} > \sqrt[6]{121}$, то есть $\sqrt{5} > \sqrt[3]{11}$ (по свойству VII корня n -й степени);

в) $(\sqrt[4]{3})^8 = 3^2 = 9$, $(\sqrt[8]{6\sqrt{2}})^8 = (6\sqrt{2})^2 = 72$. Для сравнения данных чисел целесообразно возвести их в 16-ю степень: $(\sqrt[4]{3})^{16} = 9^2 = 81$, $(\sqrt[8]{6\sqrt{2}})^{16} = (6\sqrt{2})^2 = 72$. Так как $81 > 72$, то по свойству VII $\sqrt[16]{81} > \sqrt[16]{72}$, то есть $\sqrt[4]{3} > \sqrt[8]{6\sqrt{2}}$; значит, $-\sqrt[4]{3} < -\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$.

Глава 4, §1, п.4.1.1

K

1 Какие из данных утверждений являются верными?

- а) $\sqrt{81} = 9$; в) $\sqrt{-25} = -5$; д) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$;
 б) $\sqrt{64 \cdot 16} = 32$; г) $\sqrt{9 + 16} = 3 + 4$ е) $\sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4} = a^2 - b^2$.

Что вы использовали для выполнения задания?

2

Перечертите в тетрадь и заполните таблицу:

a	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
a^3									
a^4									

Почему во второй строке таблицы есть и положительные, и отрицательные числа, а в третьей только неотрицательные?

3

Перечертите в тетрадь и заполните таблицу:

d								
d^3	0	-1	8	-27	64	125	-216	

4

Перечертите в тетрадь и заполните таблицу:

x								
x^3	-10	-9	-2	3	6	9	50	a

1) Можете ли вы записать значения переменной x ? Как вы думаете, каким образом можно устранить возникшую проблему?

2) Прочтайте на с. 3 о кубическом корне и заполните таблицу.

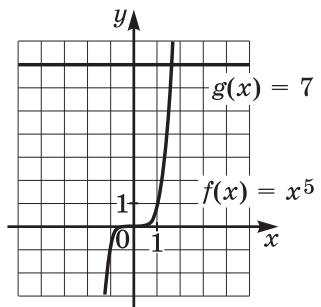
5

Проанализируйте рисунок и выполните задание:

1) Сколько решений имеет уравнение $x^5 = 7$? Предположите, как можно записать корень этого уравнения.

2) Сопоставьте своё предположение с определением 3 на с. 4 учебника и примените для решения уравнения $x^7 = 3$.

3) Познакомьтесь с понятием арифметического корня n -й чётной степени.



6

Вычислите:

а) $\sqrt[3]{64 \cdot 8}$; б) $\sqrt[4]{0,0001 \cdot 16}$; в) $\sqrt[5]{-32 \cdot 243}$; г) $\sqrt[3]{-32} \cdot \sqrt[5]{243}$.

1) Что интересного вы наблюдаете? Сформулируйте гипотезу о свойстве корня n -й степени из произведения и докажите её.

2) Сопоставьте свой вывод со свойством I на с. 5, примените его и найдите значение произведения $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$.

7

Вычислите:

а) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; б) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$; в) $\sqrt[3]{2 \frac{93}{125}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{343}{125}}$.

1) Что интересного вы наблюдаете? Сформулируйте гипотезу о свойстве корня n -й степени из частного и докажите её.

Глава 4, §1, п.4.1.1

2) Сопоставьте свой вывод со свойством II на с. 5, примените его и найдите значение частного $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

8 Вычислите значения $\sqrt[8]{8^8}$, $\sqrt[6]{(-6)^6}$, $\sqrt[4]{256}$, $\sqrt[6]{729}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[4]{0,0016}$, $\sqrt[6]{\frac{15625}{4096}}$.

9 Вычислите значения $\sqrt[9]{27^3}$, $\sqrt[7]{(-7)^7}$, $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[7]{2187}$, $\sqrt[3]{-0,343}$, $\sqrt[5]{\frac{3125}{7776}}$.

10 Упростите: $\sqrt[10]{a^8}$; $\sqrt[3]{a^9}$; $\sqrt[4]{a^{20}}$; $\sqrt[5]{a^{30}}$; $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}$; $\frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a}}$.

11 Запишите с помощью одного радикала: $\sqrt[5]{\sqrt[7]{a}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$.

12 Представьте в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[24]{a^{18}}$; $\sqrt[16]{a^{40}}$; $\sqrt[30]{a^{20}}$; $\sqrt[15]{a^{100}}$.

13 Сравните числа:

- | | | |
|--|---|---|
| а) $\sqrt[3]{100}$ и $\sqrt[6]{1000}$; | б) $\sqrt[4]{0,987}$ и $\sqrt[10]{1,234}$; | д) $\sqrt{10}$ и $\sqrt[3]{30}$; |
| б) $\sqrt[3]{\sqrt{10}}$ и $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}$; | г) $\sqrt[3]{9}$ и $\sqrt{5}$; | е) $-\sqrt[4]{5}$ и $-\sqrt[8]{10\sqrt{6}}$. |

14 Найдите наибольшее целое число, не превосходящее:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| а) $\sqrt[3]{100}$; | б) $\sqrt[7]{1234}$; | в) $\sqrt[4]{600}$; |
| г) $\sqrt[5]{-463}$. | | |

15 Вычислите значение числового выражения

$$0,5 \cdot \sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}.$$



16 Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| а) $4 + 0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots$; | б) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \dots$ ($ x > 1$). |
|---------------------------------------|---|

17 Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

- | | | |
|------------|------------|-------------|
| а) 1,7(5); | б) 2,(18); | в) 2,(134). |
|------------|------------|-------------|

18 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

- | | |
|--|--------------------------------------|
| а) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 100$; | б) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 100$; |
| в) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 100$. | |

19 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0$.



20 Вычислите значения $\sqrt[4]{5^4}$, $\sqrt[6]{(-2)^6}$, $\sqrt[4]{0,0256}$, $\sqrt[6]{4096}$, $\sqrt[6]{64\ 000\ 000}$, $\sqrt[4]{0,0625}$, $\sqrt[4]{\frac{6561}{2401}}$.



21 Вычислите значения $\sqrt[3]{9^6}$, $\sqrt[5]{(-5)^5}$, $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt[5]{-243}$, $\sqrt[7]{16\ 384}$, $\sqrt[3]{-1,331}$, $\sqrt[5]{\frac{10\ 24}{16\ 807}}$.

Глава 4, §1, п.4.1.2

22

Представьте в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[24]{a^{36}}$; $\sqrt[25]{a^{40}}$; $\sqrt[32]{a^{24}}$; $\sqrt[25]{a^{55}}$.

23

Сравните числа:

- а) $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt[6]{10}$; в) $-\sqrt[3]{1,1}$ и $\sqrt[5]{-1,1}$; д) $\sqrt{20}$ и $\sqrt[3]{90}$;
 б) $\sqrt[3]{\sqrt{15}}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{25}}$; г) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt{5}$; е) $-\sqrt[4]{7}$ и $-\sqrt[8]{15\sqrt{10}}$.

24

Найдите наибольшее целое число, не превосходящее:

- а) $\sqrt[3]{1111}$; б) $\sqrt[7]{2345}$; в) $\sqrt[4]{650}$; г) $\sqrt[5]{-1000}$.

25

Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

- а) 0,(3); б) 5,(5).

26

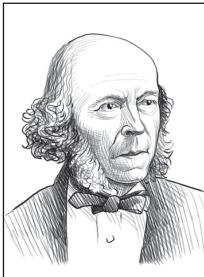
Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

- а) $5x = 6 - 2y$; б) $5|x| = 6 - 2y$; в) $5|x - 1| = 6 - 2y$.

с

27* Существует ли такое число x , при котором все три числа $2x - \sqrt{x^2 + 2}$, $\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 2006}$, $\sqrt{x^2 + 2006} - x$ являются целыми?

4.1.2. Преобразование выражений, содержащих корни n -й степени.



Дороги не те знания, которые откладываются в мозгу, как жир, дороги те, которые превращаются в умственные мышцы.

Герберт Спенсер (1820–1903),
английский философ и социолог

Свойства корней n -й степени, с которыми мы познакомились, позволяют производить и более сложные преобразования выражений, содержащих корни. Разберем некоторые способы проведения таких преобразований с помощью следующих примеров.

Вынесение множителя из-под знака корня

Аналогично случаю квадратного корня, если подкоренное выражение корня n -й степени представляется в виде произведения или частного чисел или выражений, среди которых есть точные n -е степени, то эти выражения выносятся из-под знака корня.

Пример 1. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{80}$; б) $\sqrt[5]{64}$; в) $\sqrt[3]{-16}$; г) $\sqrt[3]{\frac{128}{81}}$; д) $\sqrt[6]{\frac{512}{27}}$; е) $\sqrt[5]{-\frac{320}{243}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{16 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5} = 2\sqrt[4]{5}$; б) $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{32 \cdot 2} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2} = 2\sqrt[5]{2}$;

в) $\sqrt[3]{-16} = -\sqrt[3]{8 \cdot 2} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = -\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = -2\sqrt[3]{2}$; г) $\sqrt[3]{\frac{128}{81}} = \sqrt[3]{\frac{2^6 \cdot 2}{3^3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{3^3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2^6}{3^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

$$\text{д)} \sqrt[6]{\frac{512}{27}} = \sqrt[6]{\frac{2^6 \cdot 2^3}{3^3}} = \frac{\sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{3^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \text{е)} \sqrt[5]{-\frac{320}{243}} = -\sqrt[5]{\frac{2^5 \cdot 10}{3^5}} = -\frac{\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{3^5}} = -\frac{2}{3}\sqrt[5]{10}.$$

Пример 2. Вынести множитель из-под знака корня:

$$\text{а)} \sqrt[3]{32a^6b^5}; \quad \text{б)} \sqrt[5]{-128x^5y^6}; \quad \text{в)} \sqrt[7]{\frac{256a^9}{b^{14}}}.$$

Решение.

$$\text{а)} \sqrt[3]{32a^6b^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2 a^6 b^3 b^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{b^2} = 2a^2 b \sqrt[3]{4b^2};$$

$$\text{б)} \sqrt[5]{-128x^5y^6} = \sqrt[5]{(-32 \cdot 4)x^5y^5y} = -2xy \sqrt[5]{4y};$$

$$\text{в)} \sqrt[7]{\frac{256a^9}{b^{14}}} = \sqrt[7]{\frac{2^7 \cdot 2 \cdot a^7 \cdot a^2}{b^{14}}} = \frac{2a}{b^2} \sqrt[7]{2a^2}.$$

При вынесении множителей из-под знака корня чётной степени часто нужно учитывать знак буквенных выражений под знаком корня или использовать знак модуля.

Пример 3. Вынести множитель из-под знака корня:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \sqrt[4]{512a^5}; & \text{б)} \sqrt[4]{81a^6b^5}; & \text{в)} \sqrt[6]{-\frac{64a^8}{b^5}}; \\ \text{г)} \sqrt[4]{32a^8b^{10}}; & \text{д)} \sqrt[4]{-\frac{64a^5}{b^9}}; & \text{е)} \sqrt[8]{1024x^9y^{11}}. \end{array}$$

Решение.

а) $\sqrt[4]{512a^5} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 2 \cdot a^4 \cdot a} = \sqrt[4]{2^8} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a} = 2^2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot |a| \cdot \sqrt[4]{a}$. Так как выражение определено² только при $a \geq 0$, то $\sqrt[4]{512a^5} = 4a \cdot \sqrt[4]{2a}$, $a \geq 0$.

б) Так как $\sqrt[4]{81a^6b^5} = \sqrt[4]{3^4 a^4 b^4 a^2 b} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{a^2 b} = 3|a| \cdot |b| \sqrt[4]{a^2 b}$ (a — любое), то $\sqrt[4]{81a^6b^5} = 3b|a| \sqrt[4]{a^2 b}$ при $b \geq 0$.

$$\text{в)} \sqrt[6]{-\frac{64a^8}{b^5}} = \sqrt[6]{-\frac{2^6 a^6 \cdot a^2 b}{b^6}} = \frac{\sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{-a^2 b}}{\sqrt[6]{b^6}} = \frac{2|a| \cdot \sqrt[6]{-a^2 b}}{|b|}.$$

При $a \neq 0$ выражение определено только при $b < 0$ (тогда $|b| = -b$), получим

$$-\frac{2|a| \cdot \sqrt[3]{|a|} \sqrt[6]{-b}}{b}. \quad \text{При } a = 0 \text{ } (b \neq 0) \text{ значение выражения равно } 0.$$

$$\text{г)} \sqrt[4]{32a^8b^{10}} = \sqrt[4]{2^4 2a^8b^8b^2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{a^8} \cdot \sqrt[4]{b^8} \cdot \sqrt[4]{b^2} = 2\sqrt[4]{2} a^2 b^2 \sqrt{|b|}$$

(равенство верно при всех $a, b \in R$).

д) $\sqrt[4]{-\frac{64a^5}{b^9}} = \sqrt[4]{-\frac{2^6 a^4 a}{b^8 b}} = \frac{\sqrt[4]{2^6} \sqrt[4]{a^4}}{\sqrt[4]{b^8}} \cdot \sqrt[4]{-\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{2^3} |a|}{b^2} \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$. Было бы ошибкой в общем случае представлять $\sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$ в виде $\frac{\sqrt[4]{-a}}{\sqrt[4]{b}}$ или $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{-b}}$, так как при этом нарушается область

² Примечание: в условии не требовалось находить область определения этого выражения, однако мы указали, что $a \geq 0$, чтобы закончить преобразование раскрытием модуля. Договоримся поступать так и далее: если в условии не требуется искать область определения, то делать это по собственной инициативе мы не будем, считая, что работаем на области определения исходного выражения. Однако если для выполнения преобразования нам потребуется обратиться к области определения, мы будем делать соответствующие пометки (как в случае с примером 3а).

Глава 4, §1, п.4.1.2

определения выражения. Выражение $\sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$ определено для чисел a и b разного знака (или $a = 0, b \neq 0$); выражение $\frac{\sqrt[4]{-a}}{\sqrt[4]{b}}$ — при $a \leq 0, b > 0$.

Окончательно имеем: $\sqrt[4]{-\frac{64a^5}{b^9}} = \frac{2\sqrt{2}|a|}{b^2} \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$, если $\frac{a}{b} \leq 0$.

е) $\sqrt[8]{1024x^9y^{11}} = \sqrt[8]{2^82^2x^8xy^8y^3} = \sqrt[8]{2^8} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{x^8} \cdot \sqrt[8]{y^8} \cdot \sqrt[8]{xy^3} = 2\sqrt[4]{2}|x|\cdot|y|\cdot\sqrt[8]{xy^3} = 2\sqrt[4]{2}|xy|\cdot\sqrt[8]{xy} = 2\sqrt[4]{2}xy\cdot\sqrt[8]{xy^3}$. Выражение определено, если числа x, y одного знака или одно из них обращается в нуль, то есть при $xy \geq 0$ (поэтому $|xy| = xy$). Было бы ошибкой представить $\sqrt[8]{xy^3}$ в виде $\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[8]{y^3}$, так как это сузило бы область определения исходного выражения (последнее выражение определено, если одновременно $x \geq 0$ и $y \geq 0$).

Внесение множителя под знак корня

Пример 4.

Внести множитель под знак корня: а) $2\sqrt[4]{6}$; б) $-2\sqrt[3]{7}$; в) $-3\sqrt[4]{2}$; г) $4\sqrt[5]{\frac{5}{128}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & 2\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{96}; \\ \text{б)} \quad & -2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{-56}; \\ \text{в)} \quad & -3\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{162}. \end{aligned}$$

Заметим, что ответ в примере 4б) может быть записан как в виде $\sqrt[3]{-56}$, так и в виде $-\sqrt[3]{56}$; а вот в примере 4в) знак «минус» под корень внести нельзя, так как корень чётной степени извлекается только из неотрицательного числа и принимает неотрицательные значения.

$$\text{г)} \quad 4\sqrt[5]{\frac{5}{128}} = \sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt[5]{\frac{5}{128}} = \sqrt[5]{\frac{1024 \cdot 5}{128}} = \sqrt[5]{40}.$$

Пример 5.

Внести множитель под знак корня: а) $3ab\sqrt[3]{a^2b}$; б) $-2xy^3\sqrt[5]{x^2y^4}$; в) $-xz\sqrt[7]{\frac{x^5}{z^2}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & 3ab\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{27a^5b^4}; \\ \text{б)} \quad & -2xy^3\sqrt[5]{x^2y^4} = -\sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[5]{y^{15}} \cdot \sqrt[5]{x^2y^4} = \sqrt[5]{-32x^7y^{19}}; \\ \text{в)} \quad & -xz\sqrt[7]{\frac{x^5}{z^2}} = -\sqrt[7]{x^7} \cdot \sqrt[7]{z^7} \cdot \sqrt[7]{\frac{x^5}{z^2}} = \sqrt[7]{-x^{12}z^5}. \end{aligned}$$

При внесении множителя под знак корня чётной степени часто нужно учитывать знак соответствующего буквенного выражения.

Пример 6.

Внести множитель под знак корня: а) $x\sqrt[4]{x}$; б) $y\sqrt[6]{-y}$; в) $a^3b\sqrt[4]{ab^3}$; г) $a^2b\sqrt[4]{ab^2}$;

$$\text{д)} \quad -ab\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}}; \text{ е)} \quad a^2\sqrt[8]{-ab^2}.$$

Решение.

а) Выражение определено при $x \geq 0$, поэтому $x = \sqrt[4]{x^4}$. Тогда $x\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^5}$, $x \geq 0$.

б) Выражение определено при $y \leq 0$, поэтому $y = -|y| = -\sqrt[6]{(-y)^6} = -\sqrt[6]{y^6}$. Тогда $y\sqrt[6]{-y} = -\sqrt[6]{y^6} \cdot \sqrt[6]{-y} = -\sqrt[6]{-y^7}$, $y \leq 0$.

в) Выражение определено, если $ab^3 \geq 0$, то есть если числа a и b одного знака или хоть одно из них обращается в нуль. Тогда $a^3b \geq 0$ и $a^3b = \sqrt[4]{(a^3b)^4} = \sqrt[4]{a^{12}b^4}$. Поэтому $a^3b\sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{a^{12}b^4} \cdot \sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{a^{13}b^7}$, если $ab \geq 0$ (числа a и b одного знака или хоть одно из них обращается в нуль).

г) Выражение определено, если $ab^2 \geq 0$, то есть если $a \geq 0$ или $b = 0$ (в последнем случае a — любое). При этом $b = |b| = \sqrt[4]{b^4}$, если $b > 0$ и $b = -|b| = -\sqrt[4]{b^4}$, если $b < 0$. Тогда при $b > 0$ получим $a^2b \cdot \sqrt[4]{ab^2} = \sqrt[4]{a^8} \cdot \sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{ab^2} = \sqrt[4]{a^9b^6}$, а при $b < 0$ получим $a^2b \cdot \sqrt[4]{ab^2} = \sqrt[4]{a^8} \cdot (-\sqrt[4]{b^4}) \cdot \sqrt[4]{ab^2} = -\sqrt[4]{a^9b^6}$. Итак,

$$a^2b\sqrt{ab^2} = \begin{cases} \sqrt[4]{a^9b^6}, & \text{если } b > 0, a > 0; \\ -\sqrt[4]{a^9b^6}, & \text{если } b < 0, a > 0. \end{cases}$$

Если $b = 0$ или $a = 0$, то равенство имеет место для обоих знаков.

д) Выражение определено, если $\frac{a^3}{b^4} \geq 0$, то есть если $a \geq 0$ и $b \neq 0$.

При этом $b = |b| = \sqrt[6]{b^6}$, если $b > 0$, и $b = -|b| = -\sqrt[6]{b^6}$, если $b < 0$. Тогда при $b > 0$ получим $-ab\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}} = -\sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{b^6} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}} = -\sqrt[6]{a^9b^2}$, а при $b < 0$ получим $-ab\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}} = -\sqrt[6]{a^6} \cdot (-\sqrt[6]{b^6}) \cdot \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}} = \sqrt[6]{a^9b^2}$.

Итак,

$$-ab\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}} = \begin{cases} -\sqrt[6]{a^9b^2}, & \text{если } a > 0, b > 0; \\ \sqrt[6]{a^9b^2}, & \text{если } a > 0, b < 0. \end{cases}$$

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то равенство имеет место для обоих знаков.

е) Выражение определено, если $ab^2 \leq 0$, то есть если $a \leq 0$ или $b = 0$ (в последнем случае a — любое). Тогда $a^2\sqrt[8]{-ab^2} = \sqrt[8]{a^{16}} \cdot \sqrt[8]{-ab^2} = \sqrt[8]{-a^{17}b^2}$.

Итак, $a^2\sqrt[8]{-ab^2} = \sqrt[8]{-a^{17}b^2}$, если $a \leq 0$ или $b = 0$.

Приведение радикалов к общему показателю

Если имеется произведение или частное радикалов с различными показателями корня, то это выражение можно превратить в один радикал с показателем, равным наименьшему общему кратному всех имеющихся показателей (эта процедура основана на свойстве VI корней n -й степени и аналогична приведению к общему знаменателю при сложении или вычитании дробей).

Пример 7. Представить выражение в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[3]{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{12}}$;

б) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{-\frac{2}{15}}$;

в) $\frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[8]{10}} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$.

Глава 4, §1, п.4.1.2

Решение.

а) Наименьшее общее кратное чисел 3, 2 и 5 равно 30, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 30:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{12}} = \sqrt[30]{3^{10}} \cdot \frac{\sqrt[30]{2^{15}}}{\sqrt[30]{12^6}} = \sqrt[30]{\frac{3^{10} \cdot 2^{15}}{12^6}} = \sqrt[30]{\frac{3^{10} \cdot 2^{15}}{3^6 \cdot 4^6}} = \sqrt[30]{\frac{3^4 \cdot 2^{15}}{2^{12}}} = \sqrt[30]{3^4 \cdot 2^3} = \sqrt[30]{648}.$$

б) Наименьшее общее кратное чисел 4 и 5 равно 20, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 20:

$$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{-\frac{2}{15}} = \sqrt[20]{5^5} \cdot \left(-\sqrt[20]{\frac{2^4}{15^4}} \right) = -\sqrt[20]{\frac{5^5 \cdot 2^4}{15^4}} = -\sqrt[20]{\frac{5^5 \cdot 2^4}{3^4 \cdot 5^4}} = -\sqrt[20]{\frac{5 \cdot 2^4}{3^4}} = -\sqrt[20]{\frac{80}{81}}.$$

в) Наименьшее общее кратное чисел 6, 8 и 4 равно 24, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 24:

$$\sqrt[8]{10} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}} = \sqrt[24]{\frac{9^4 \cdot 2^6}{10^3 \cdot 3^6}} = \sqrt[24]{\frac{3^8 \cdot 2^6}{2^3 \cdot 5^3 \cdot 3^6}} = \sqrt[24]{\frac{2^3 \cdot 3^2}{5^3}} = \sqrt[24]{\frac{72}{125}}.$$

Пример 8. Представить выражение в виде корня некоторой степени из рационального выражения: а) $\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{2a^3b}$; б) $\sqrt[4]{5ax^4} \cdot \sqrt[6]{a^3x^2}$; в) $\sqrt[5]{x^3y^2} \cdot \frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt{x^3y^6}}$, считая величины a, b, x, y положительными.

Решение.

Положительность величин a, b, x, y нужна для того, чтобы не следить за возможным изменением области определения выражения (иногда может потребоваться дополнительное исследование знака окончательного выражения, не имеющее сейчас принципиального значения).

а) Наименьшее общее кратное чисел 3, 6 и 15 равно 30, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 30:

$$\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[6]{2a^3b} = \sqrt[30]{a^{10}b^{20}} \cdot \sqrt[30]{\frac{2^5 a^{15}b^5}{4^2 a^4 b^{12}}} = \sqrt[30]{\frac{a^{10}b^{20} \cdot 2^5 a^{15}b^5}{4^2 a^4 b^{12}}} = \sqrt[30]{2a^{21}b^{13}}.$$

б) Наименьшее общее кратное чисел 4 и 6 равно 12, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 12:

$$\sqrt[4]{5ax^4} \cdot \sqrt[6]{a^3x^2} = \sqrt[12]{\frac{3^3 a^6 x^3 \cdot a^6 x^4}{5^3 a^3 x^{12}}} = \sqrt[12]{\frac{27}{125} \cdot \frac{a^9}{x^5}}.$$

в) Наименьшее общее кратное чисел 5, 2 и 4 равно 20, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 20:

$$\sqrt[5]{x^3y^2} \cdot \frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt[4]{x^3y^6}} = \sqrt[20]{x^{12}y^8} \cdot \frac{\sqrt[20]{2^{10}x^{10}y^{10}}}{\sqrt[20]{x^{15}y^{30}}} = \sqrt[20]{\frac{x^{12}y^8 \cdot 2^{10}x^{10}y^{10}}{x^{15}y^{30}}} = \sqrt[20]{\frac{1024x^7}{y^{12}}}.$$

Избавление от иррациональности в знаменателе (или числителе) дроби

Аналогично случаю квадратного корня часто бывает удобно избавиться от знака корня в знаменателе дроби («избавиться от иррациональности»).

Пример 9.

Избавиться от иррациональности в знаменателях дробей:

$$\text{а)} \frac{3}{\sqrt[3]{7}}; \quad \text{б)} \frac{11}{\sqrt[4]{8}}; \quad \text{в)} \frac{2}{\sqrt[3]{-5}}; \quad \text{г)} \frac{ab}{\sqrt[6]{c^5}}.$$

Решение.

Во всех этих случаях нужно умножить числитель и знаменатель дроби на корень из выражения, которое дополняло бы подкоренное выражение до полной n -й степени, например, в примере а) до $\sqrt[3]{7^3}$.

$$\text{а)} \frac{3}{\sqrt[3]{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{3\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{3\sqrt[3]{49}}{7};$$

$$\text{б)} \frac{11}{\sqrt[4]{8}} = \frac{11 \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{11\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{11\sqrt[4]{2}}{2};$$

$$\text{в)} \frac{2}{\sqrt[3]{-5}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{25}}{5};$$

$$\text{г)} \frac{ab}{\sqrt[6]{c^5}} = \frac{ab \cdot \sqrt[6]{c}}{\sqrt[6]{c^5} \cdot \sqrt[6]{c}} = \frac{ab \cdot \sqrt[6]{c}}{\sqrt[6]{c^6}} = \frac{ab\sqrt[6]{c}}{c}, c > 0.$$

Заметим, что аналогичным образом можно избавиться и от иррациональности в числителе.

κ

28 Даны выражения $\sqrt[10]{32a^5}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[12]{a^{10}b^6}$, $\sqrt[7]{a^{14}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^{12}}{b^6}}$. Какие из них можно упростить? Упростите их.

29

Сравните числа:

$$\text{а)} \sqrt{3} \text{ и } \sqrt[3]{4}; \quad \text{б)} \sqrt[3]{4} \text{ и } \sqrt[4]{5}; \quad \text{в)} \sqrt[3]{2} \text{ и } \sqrt[3]{\sqrt{19}}.$$

Какие свойства вы использовали для выполнения задания?

30

1) Какое из чисел больше:

$$\text{а)} 3\sqrt{2} \text{ или } 2\sqrt{3}; \quad \text{б)} 4\sqrt{5} \text{ или } 2\sqrt{10}; \quad \text{в)} 6\sqrt{5} \text{ или } 5\sqrt{8}?$$

2) Вынесите из-под корня множители:

$$\text{а)} \sqrt{121a^8b^5c^{19}}; \quad \text{б)} \sqrt{256a^4b^9c^{21}}.$$

31

1) Выпишите выражения, подчеркните множители, которые можно вынести из-под знака корня: $\sqrt[3]{27 \cdot 3a^3 \cdot a \cdot x^3 \cdot x^2}$; $\sqrt[5]{32 \cdot a^{10} \cdot x^5 \cdot x^2}$.

2) Вынесите множители из-под знака корня. Какими свойствами корня n -й степени необходимо воспользоваться?

3) Сравните выполнение задания с решением примеров 1 и 2 на с. 10–11 учебника и упростите выражение $\sqrt[4]{625x^5y^6n^4}$.

32

Представьте выражение в виде корня некоторой степени из рационального числа, используя известные вам свойства корней:

$$\text{а)} \sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[10]{5}; \quad \text{б)} \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[5]{11}}.$$

1) Сопоставьте показатели исходных корней и показатель корня, полученного в результате преобразования. Что интересного вы наблюдаете?

2) Сформулируйте вывод о способе приведения корней разных степеней к корню одной степени, сопоставьте его со способом, который применили в примере 7 на с. 13–14 учебника.

3) Может ли полученный вывод помочь в упрощении выражений: $\frac{\sqrt[4]{2a^2b^{3c}}}{\sqrt[6]{ab^3c^2}}$; $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[7]{-\frac{2}{24}}$? Упростите их.

Глава 4, §1, п.4.1.2

33

Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{2000}$; б) $\sqrt[5]{96}$; в) $\sqrt[3]{-250}$; г) $\sqrt[3]{\frac{625}{243}}$; д) $\sqrt[6]{\frac{128}{125}}$.

34

Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{128a^5b^4}$; б) $\sqrt[5]{-512x^6y^{15}}$; в) $\sqrt[7]{\frac{4096a^{10}}{b^{35}}}$; г) $\sqrt[4]{81a^9}$; д) $\sqrt[4]{49a^9b^5}$.

35

Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[4]{2}$; б) $-7\sqrt[3]{2}$; в) $-4\sqrt[4]{3}$; г) $6\sqrt[5]{\frac{3}{64}}$.

36

Внесите множитель под знак корня:

а) $4a^2b\sqrt[3]{a^4b}$; в) $-xyz\sqrt[3]{\frac{x^4}{yz^2}}$; г) $y^3\sqrt[6]{-y}$;
б) $-3x^3y^4\sqrt[7]{xy^6}$; г) $x^2\sqrt[4]{x^3}$; и) $-a^2b\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^2}}$.

37

Представьте выражения в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[5]{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{32}}$; б) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{-\frac{5}{12}}$; в) $\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[8]{18}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$.

38

Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$; б) $\frac{10}{\sqrt[4]{32}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[3]{-7}}$; г) $\frac{abc}{\sqrt[6]{c^7}}$.

π

39 Сравните числа: а) $\sqrt[4]{24}$ и $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{9}$; в) $-\sqrt[4]{4}$ и $-\sqrt[8]{4\sqrt{2}}$.

40

Представьте в виде корня с меньшей степенью:

$\sqrt[24]{a^{20}}$; $\sqrt[14]{a^{21}}$; $\sqrt[30]{a^{35}}$; $\sqrt[15]{a^{30}}$.

41

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $(x - 3)(y - 4) = 1$; б) $|x| + |y - 2| = 3$; в) $(x - 1)^2 = -(y - 2)^2$.

42

Упростите выражение $\sqrt{11} - \sqrt{3} - \frac{8}{\sqrt{14+2\sqrt{33}}}$.

δ

43 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{1250}$; б) $\sqrt[5]{5120}$; в) $\sqrt[3]{-12\ 005}$; г) $\sqrt[3]{\frac{250}{243}}$; д) $\sqrt[6]{\frac{3645}{3584}}$.

44

Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[4]{3}$; б) $-5\sqrt[3]{4}$; в) $-2\sqrt[4]{2}$; г) $12\sqrt[5]{\frac{3}{512}}$.

45

Внесите множитель под знак корня:

а) $3a^3b\sqrt[3]{2a^5b}$; в) $-xy^2z^3\sqrt[3]{\frac{1}{x^5y^3z}}$; г) $-y^3\sqrt[6]{-y^5}$;
б) $-2x^2y^7\sqrt[7]{3x^2y^5}$; г) $x^3\sqrt[4]{-x^5}$; е) $ab\sqrt[8]{\frac{a^3}{b^8}}$.

46

Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{162a^7b^2}$; б) $\sqrt[5]{-1280x^{13}y^7}$; в) $\sqrt[7]{\frac{10935a^8}{b^{70}}}$; г) $\sqrt[4]{-324a^{15}}$; д) $\sqrt[4]{125a^{11}b^5}$.

47

Представьте выражения в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[5]{8} \cdot \frac{\sqrt{32}}{\sqrt[4]{2048}}$; б) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[5]{-\frac{1}{18}}$; в) $\frac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[8]{72}} \cdot \sqrt[4]{6}$.

48

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{30}{\sqrt[3]{81}}$; б) $\frac{20}{\sqrt[4]{128}}$; в) $\frac{35}{\sqrt[3]{-49}}$; г) $\frac{ab}{\sqrt[6]{a^{13}}}$.

49

Сравните числа: а) $\sqrt[5]{10}$ и $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; в) $-\sqrt[4]{7}$ и $-\sqrt{2\sqrt{3}}$.

50

Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $(x - 1)(y + 2) = 1$; б) $|x + 1| - |y| = 2$; в) $(1 - x)^2 = -(y - 1)^2$.

C

51* Докажите равенство³: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$, если $a \geqslant \sqrt{b}$.

4.1.3.* Более сложные преобразования выражений, содержащих корни.



Если бы природа не была прекрасной, она не стоила бы того труда, который тратится на её познание, ... Я говорю о той красоте, которая сквозит в гармоничном порядке частей и которую воспринимает только чистый интеллект... и это ради неё, учёный обрекает себя на многолетнюю и утомительную работу.

Анри Пуанкаре (1854–1912),
французский математик, механик, физик, философ

В этом пункте мы рассмотрим более сложные преобразования выражений, содержащих корни n -й степени.

Применение формул сокращённого умножения

Вспомним, как мы избавлялись от иррациональности в знаменателе в выражениях с квадратным корнем. Если в знаменателе дроби имелась сумма или разность квадратных корней, то мы умножали числитель и знаменатель дроби на так называемое «сопряжённое выражение» для последующего применения формулы разности квадратов, по которой $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$.

Например, $\frac{2 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{6 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{7}$.

Аналогичные преобразования можно провести для корней более высоких степеней, применив формулы суммы и разности кубов и т.д. Например,

³ Это равенство называется формулой сложного радикала.

Глава 4, §1, п.4.1.3

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) &= (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\left((\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\right) = (\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3 = a-b; \\ (\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) &= (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Пример 1.

Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\text{а)} \frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}; \text{ б)} \frac{3+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+3}; \text{ в)} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1}; \text{ г)} \frac{1}{\sqrt[6]{5}-1}; \text{ д*)} \frac{1}{\sqrt[5]{3}-1}.$$

Решение.

$$\text{а)} \frac{2}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2})^3-1} = 2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1);$$

$$\text{б)} \frac{3+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+3} = \frac{(3+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4}\cdot 3+3^2)}{(\sqrt[3]{4}+3)(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4}\cdot 3+3^2)} = \frac{(3+\sqrt[3]{2})(2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4}+9)}{(\sqrt[3]{4})^3+3^3} = \frac{6\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}-9\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{8}+27+9\sqrt[3]{2}}{31} = \frac{21+15\sqrt[3]{2}-7\sqrt[3]{4}}{31};$$

$$\text{в)} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2})^2-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt[4]{2}+1)}{2-1} = (3+2\sqrt{2})(\sqrt[4]{2}+1);$$

$$\text{г)} \frac{1}{\sqrt[6]{5}-1} = \frac{\sqrt[6]{5}+1}{(\sqrt[6]{5}-1)(\sqrt[6]{5}+1)} = \frac{\sqrt[6]{5}+1}{(\sqrt[6]{5})^2-1} = \frac{\sqrt[6]{5}+1}{\sqrt[3]{5}-1} = \frac{(\sqrt[6]{5}+1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)}{(\sqrt[3]{5}-1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)} = \frac{(\sqrt[6]{5}+1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)}{(\sqrt[3]{5})^3-1} = \frac{(\sqrt[6]{5}+1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)}{4}.$$

* * *

д*) Воспользуемся тем, что $(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)=a^5-1$ для любых a (проверьте это самостоятельно), поэтому

$$\frac{1}{\sqrt[5]{3}-1} = \frac{(\sqrt[5]{3})^4+(\sqrt[5]{3})^3+(\sqrt[5]{3})^2+\sqrt[5]{3}+1}{(\sqrt[5]{3}-1)((\sqrt[5]{3})^4+(\sqrt[5]{3})^3+(\sqrt[5]{3})^2+\sqrt[5]{3}+1)} = \frac{\sqrt[5]{81}+\sqrt[5]{27}+\sqrt[5]{9}+\sqrt[5]{3}+1}{2}.$$

Пример 2.

Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\text{а)} \frac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}; \quad \text{б)} \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}; \quad \text{в)} \frac{a-1}{\sqrt[6]{a}-1}; \quad \text{г)} \frac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt{a}+4)}.$$

Решение.

$$\text{а)} \frac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})} = \frac{a(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b};$$

$$\text{б) если } a \neq b, \text{ то } \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}{a-b};$$

$$\text{если же } a=b, \text{ то } \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{(\sqrt[4]{a})^2}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[4]{a}.$$

$$\text{в)} \frac{a-1}{\sqrt[6]{a}-1} = \frac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)}{(\sqrt[6]{a}-1)(\sqrt[6]{a}+1)} = \frac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)}{\sqrt[3]{a}-1} = \frac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)}{(\sqrt[3]{a}-1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)} = \\ = \frac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)}{a-1} = (\sqrt[6]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1), \quad a \neq 1;$$

г) если $a \neq 4$ и $a \neq 8$, то домножим числитель и знаменатель дроби сразу на два со-пряжённых выражения:

$$\frac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)} = \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt[3]{a}-2)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)(\sqrt[3]{a}-2)} = \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt[3]{a}-2)}{(a-4)(a-8)};$$

$$\text{если } a = 4, \text{ то } \frac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)} = \frac{1}{(2+2)(\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}+4)} = \frac{1}{4(2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}+4)} = \\ = \frac{1}{16(\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{48};$$

$$\text{если } a = 8, \text{ то } \frac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)} = \frac{1}{(\sqrt{8}+2)(\sqrt[3]{64}+2\sqrt[3]{8}+4)} = \frac{1}{(2\sqrt{2}+2)(4+4+4)} = \\ = \frac{1}{24(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{24}.$$

Комбинирование известных преобразований

Упрощая выражения с квадратными корнями, мы иногда применяли сразу несколько различных преобразований: вынесение выражения из-под знака корня, возведение корня в степень и пр. Для упрощения выражений со знаком корня n -й степени мы тоже будем комбинировать известные нам преобразования.

Пример 3. Упростить выражения:

$$\text{а)} \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1)-2\sqrt[3]{a^2}}; \quad \text{б)} \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}-x}; \quad \text{в)} \frac{1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-\sqrt[4]{45})^2}.$$

Решение.

а) Так как по условию $a > 0$, то можем представить $\sqrt[3]{a^2}$ в виде:

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6]{a \cdot a^3} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt{a}.$$

$$\text{Поэтому } \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1)-2\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1)-2\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1-2\sqrt{a})} = \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(1-\sqrt{a})^2} = \\ = \frac{1}{\sqrt[6]{a}(1-\sqrt{a})}, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

б) Так как по условию $x > 0$, то можем представить $\sqrt[4]{x^3}$ в виде:

$$\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{x \cdot x^2} = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x}.$$

$$\text{Поэтому } \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}-x} = \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \\ = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}, \quad x > 0, \quad x \neq 1.$$

в) Числитель дроби равен $1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}=1-2\sqrt[4]{5}+(\sqrt[4]{5})^2=(1-\sqrt[4]{5})^2$.

Глава 4, §1, п.4.1.3

Знаменатель равен $(\sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{9 \cdot 5})^2 = (\sqrt[4]{9} \cdot (1 - \sqrt[4]{5}))^2 = (\sqrt[4]{9})^2 \cdot (1 - \sqrt[4]{5})^2 = \sqrt{9} \cdot (1 - \sqrt[4]{5})^2 = 3(1 - \sqrt[4]{5})^2$.

Поэтому $\frac{1 - 2\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}}{(\sqrt{3} - \sqrt[4]{45})^2} = \frac{(1 - \sqrt[4]{5})^2}{3(1 - \sqrt[4]{5})^2} = \frac{1}{3}$.

Выражения, которые содержат переменную под знаком корня, принято называть **иррациональными**. Рассмотрим примеры применения рассмотренных нами преобразований к упрощению подобных выражений.

Пример 4. Упростить выражение:

- $\frac{a}{\sqrt[3]{a}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}+1} + \frac{1}{1-\sqrt[3]{a}} - \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1};$
- $\left(\frac{(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3})(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \frac{2}{a+b};$
- $\left(\sqrt[4]{a^2 - 2a + 1} + \frac{a}{\sqrt{1-a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{\sqrt{a+1}}{a-1} \right).$

Решение.

а) Сгруппируем дроби с одинаковыми знаменателями:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt[3]{a}-1} + \frac{1}{1-\sqrt[3]{a}} &= \frac{a}{\sqrt[3]{a}-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}-1} = \frac{a-1}{\sqrt[3]{a}-1} = \frac{(\sqrt[3]{a}-1)(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1)}{\sqrt[3]{a}-1} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1; \\ \frac{1}{\sqrt[3]{a}+1} - \frac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}} &= \frac{1-\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}} = \frac{(1-\sqrt[3]{a})(1+\sqrt[3]{a})}{1+\sqrt[3]{a}} = 1 - \sqrt[3]{a}. \end{aligned}$$

Искомое выражение равно $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1 + 1 - \sqrt[3]{a} = 2 + \sqrt[3]{a^2}$.

б) Числитель первой дроби равен

$$\begin{aligned} (\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3})(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}) &= (\sqrt[4]{a^3})^2 - (\sqrt[4]{b^3})^2 = \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3} = (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3 = \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})((\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2). \end{aligned}$$

Поэтому искомое выражение равно:

$$\left(\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})((\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 - \sqrt{ab})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{2}{a+b} = (a+b) \cdot \frac{2}{a+b} = 2.$$

в) Делимое равно $\sqrt[4]{a^2 - 2a + 1} + \frac{a}{\sqrt{1-a}} = \sqrt[4]{(a-1)^2} + \frac{a}{\sqrt{1-a}}$.

Из условия следует, что $a < 1$, поэтому $\sqrt[4]{(a-1)^2} = \sqrt[4]{(1-a)^2} = \sqrt{1-a}$,

и делимое равно $\sqrt{1-a} + \frac{a}{\sqrt{1-a}} = \frac{(\sqrt{1-a})^2 + a}{\sqrt{1-a}} = \frac{1-a+a}{\sqrt{1-a}} = \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

Делитель равен $\frac{1}{\sqrt{a+1}} - \frac{\sqrt{a+1}}{a-1} = \frac{a-1 - (\sqrt{a+1})^2}{\sqrt{a+1}(a-1)} = \frac{a-1 - (a+1)}{\sqrt{a+1}(a-1)} = \frac{-2}{\sqrt{a+1}(a-1)} = \frac{2}{\sqrt{a+1}(1-a)}$.

Искомое выражение равно

$$\frac{1}{\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\sqrt{1+a}(1-a)}{2} = \frac{\sqrt{1+a}(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{1-a} \cdot 2} = \frac{\sqrt{1+a} \cdot \sqrt{1-a}}{2} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2}.$$

Пример 5.

Упростить выражение: а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$; б*) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$.

Решение.

а) Можно заметить, что $(3-2\sqrt{2})^2 = 9-12\sqrt{2}+8=17-12\sqrt{2}$. Поэтому $\sqrt{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} \sqrt[4]{17+12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{17^2-(12\sqrt{2})^2} = \sqrt[4]{289-144 \cdot 2} = \sqrt[4]{1} = 1$.

Иначе пример можно было решить, заметив, что $17+12\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^2$. Откуда получаем $\sqrt[4]{17+2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Искомое выражение равно $\sqrt{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \sqrt{9-8} = 1$.

* * *

б*) Данное выражение можно упростить, используя различные способы. Рассмотрим их.

1-й способ.

Можно заметить, что $10+6\sqrt{3}=9+1+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=(\sqrt{3})^3+3 \cdot (\sqrt{3})^2+3 \cdot \sqrt{3}+1=(\sqrt{3}+1)^3$.

Аналогично $10-6\sqrt{3}=1-3 \cdot \sqrt{3}+3 \cdot (\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^3=(1-\sqrt{3})^3$.

Поэтому искомое выражение равно $\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3}=\sqrt{3}+1+1-\sqrt{3}=2$.

2-й способ.

Пусть $x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$, $y=\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$. Тогда искомое выражение равно $x+y$.

Рассмотрим выражение $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=10+6\sqrt{3}+10-6\sqrt{3}+3 \cdot \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} \cdot (x+y)=20+3 \cdot (-2) \cdot (x+y)$.

Здесь мы заменили $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ на -2 , так как $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})(10-6\sqrt{3})}=\sqrt[3]{100-(6\sqrt{3})^2}=\sqrt[3]{100-108}=\sqrt[3]{-8}=-2$.

Значит, $(x+y)^3=20-6(x+y)$ и искомое выражение $x+y$ удовлетворяет уравнению $t^3=20-6t$, то есть $t^3+6t-20=0$.

Разложив на множители левую часть уравнения, получим:

$$t^3-8+6t-12=(t-2)(t^2+2t+4)+6(t-2)=(t-2)(t^2+2t+10).$$

Так как квадратный трёхчлен $t^2+2t+10$ не имеет корней ($D < 0$), то уравнение $t^3+6t-20=0$ имеет единственный корень $t=2$. Поэтому искомое выражение равно 2.

K

52

Какие из данных утверждений являются верными?

а) $\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}=(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2$; г) $(\sqrt[n]{a})^n=a$;

б) $a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$; д) если $a \geq 0$, то $a=\sqrt[4]{a^4}$;

в) $a+b=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$; е) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

53

1) Представьте число в виде квадрата:

а) 5; б) a ; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt[3]{b}$.

2) Представьте число в виде куба:

а) -3 ; б) b ; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt[3]{b}$.

54

Разложите на множители:

а) $27x^3-8$; г) $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$; ж) $\sqrt{a}-16\sqrt[4]{ab}+64\sqrt{b}$;

б) a^3+b^6 ; д) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$; з) $\sqrt[3]{a}+8\sqrt[6]{ab}+16\sqrt[3]{b}$;

в) a^4-b^4 ; е) $\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}$; и) $a+3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}+b$.

Глава 4, §1, п.4.1.3

55

Освободитесь от иррациональности в знаменателях дробей:

a) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; б) $\frac{12}{x+2\sqrt{3}}$.

56

1) Освободитесь от иррациональности в знаменателях дробей:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$; б) $\frac{2}{2-\sqrt[3]{3}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$.

2) Какие из верных утверждений № 52 потребуются для выполнения этого преобразования?

3) Проанализируйте выражения из пункта 1. Сформулируйте общий способ, с помощью которого можно избавиться от иррациональности в знаменателе во всех подобных случаях, сопоставьте его со способом, описанным на с. 17–18.

57

Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

a) $\frac{6}{\sqrt[3]{4}-1}$; б) $\frac{1-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}$; в) $\frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt[4]{3}-2}$; г*) $\frac{1}{\sqrt[6]{2}-1}$.

58

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}$.

59

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}$.

60

Упростите выражение:

а) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}} + \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a+2\sqrt[3]{a^2}}$;

б) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{a}}{\sqrt[4]{a}\sqrt{a}-\sqrt[8]{a}} + \frac{\sqrt[8]{a}-1}{\sqrt{\sqrt{a}}-2\sqrt[8]{a}+1} \right) : \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}+1}$;

в) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}-\sqrt[4]{ab}} - \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{a}} \right) \cdot (\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{a^2b}) \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

61

Упростите выражение $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

62

Упростите выражение $\sqrt{t+6\sqrt{t-9}} + \sqrt{t-6\sqrt{t-9}}$ ($9 \leq t \leq 18$).

63

Докажите равенство $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} = 3$.

π

64 Представьте выражение в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

65

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{3}{\sqrt[4]{2}}$; б) $\frac{11}{\sqrt[3]{5}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{-3}}$; г) $\frac{n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

66

Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{x+4}$; б) $y = \sqrt{-x-1} + \frac{2}{1+x}$; в) $y = \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}$.

67 Найдите область определения функции, постройте её график и укажите множество её значений:

a) $y = 2\sqrt{1-3x} + 3$; б) $y = |1 - |x||$.

68 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{12}{\sqrt[3]{9}-1}$; б) $\frac{1+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+2}$; в) $\frac{\sqrt{5}-4}{\sqrt[4]{5}-2}$; г*) $\frac{1}{\sqrt[6]{3}-1}$.

69 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

70 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

71 Упростите выражение $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

72 Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{8}$; б) $\sqrt[5]{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[15]{2}}$.

73 Найдите область определения функции, постройте её график и укажите множество её значений:

а) $y = 2 - \sqrt{1+2x}$; б) $y = |2 - \sqrt{1-2x}|$; в) $y = \frac{1}{2 - \sqrt{1+2x}}$.

74* Найдите значение суммы $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

75* Докажите равенство $\sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = 1$.

4.1.4. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ и её график



*В одном мгновении увидеть вечность,
Огромный мир — в зерне песка,
В единой горсти — бесконечность
И небо — в чашечке цветка.*

У. Блейк (1757–1827),
английский поэт, художник

В 8 классе мы уже изучили свойства функции $y = \sqrt{x}$. В этом пункте мы познакомимся с более общим её случаем — функцией $y = \sqrt[n]{x}$. Точно так же, как при изучении свойств функции $y = \sqrt{x}$ нам помогали знания о функции $y = x^2$, при изучении свойств $y = \sqrt[n]{x}$ нам поможет функция $y = x^n$.

Вспомним, что нам известно о графике степенной функции $y = x^n$. При чётном n это кривая, напоминающая параболу $y = x^2$, только быстрее растущая при неограниченном увеличении x по модулю (если $n \geq 4$) и теснее прилегающая к оси Ox при x , очень малых по модулю (рис. 1а). Аналогично график функции $y = x^n$ при нечётном

Глава 4, §1, п.4.1.4

натуральном n напоминает кривую $y = x^3$ с такими же замечаниями насчет роста при неограниченном увеличении x по модулю и прилегания к оси Ox при x , очень малых по модулю (рис. 1б).

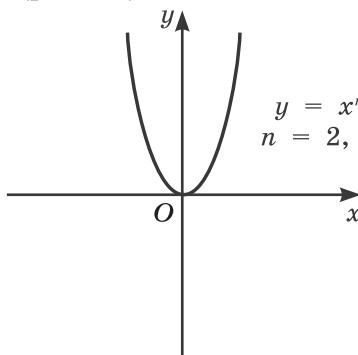


Рис. 1а

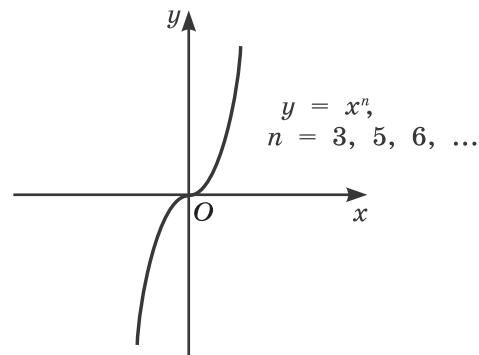


Рис. 1б

Теперь мы готовы к изучению функции $y = \sqrt[n]{x}$. Начнём с построения её графика. Построим график $y = \sqrt[n]{x}$ по точкам для простейшего неизученного нами случая — для $n = 3$.

Заполним таблицу:

x	0	$\pm\frac{1}{8}$	± 1	$\pm\frac{27}{8} = \pm 3\frac{3}{8}$	± 8
y	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm\frac{3}{2} = \pm 1\frac{1}{2}$	± 2

Построим кривую по точкам с указанными в таблице координатами. График $y = \sqrt[3]{x}$ изображен на рис. 2.

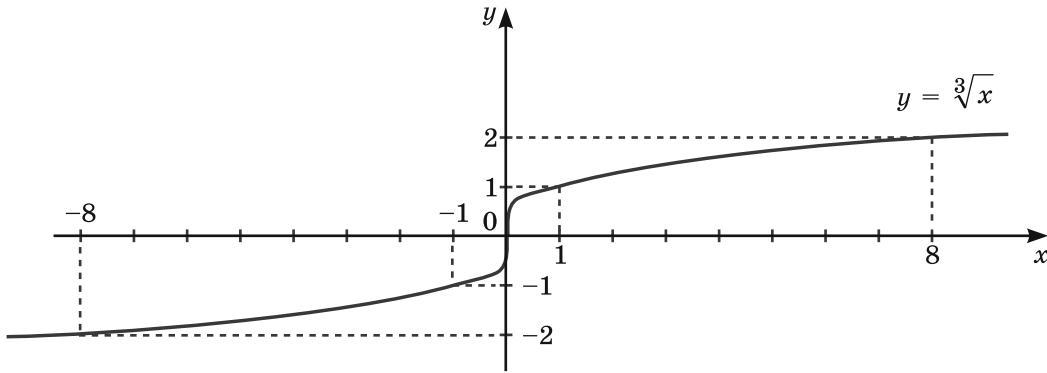


Рис. 2

Можно заметить, что эта кривая симметрична графику $y = x^3$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Подобную картину мы наблюдали и для функции $y = \sqrt{x}$ — её график является правой ветвью параболы, которую симметрично отобразили относительно этой биссектрисы.

Действительно, равенство $y = x^n$ при нечётном натуральном n равносильно $x = \sqrt[n]{y}$. Поэтому для построения графика $y = \sqrt[n]{x}$ достаточно в графике $y = x^n$ поменять местами x и y , то есть отразить его симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. График $y = x^n$ изображен на рис. 3.

Равенство $y = x^n$ при чётном натуральном n равносильно $x = \sqrt[n]{y}$, только если $x \geq 0$. Значит, если мы хотим построить график $y = \sqrt[n]{x}$, то нужно отразить симметрично

относительно биссектрисы первого координатного угла только правую («положительную») часть кривой $y = x^n$ (рис. 4).

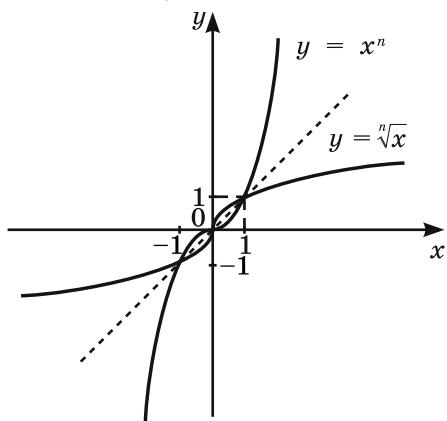


Рис. 3

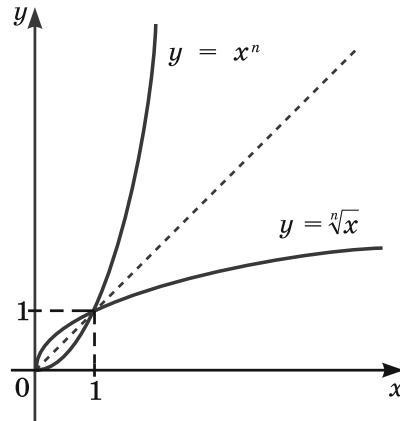


Рис. 4

Если построить график $y = \sqrt[n]{x}$ по точкам (например, для $n = 4$), то, естественно, получится такая же картина.

x	0	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$	16
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$	2

График $y = \sqrt[4]{x}$ изображён на рис. 5.

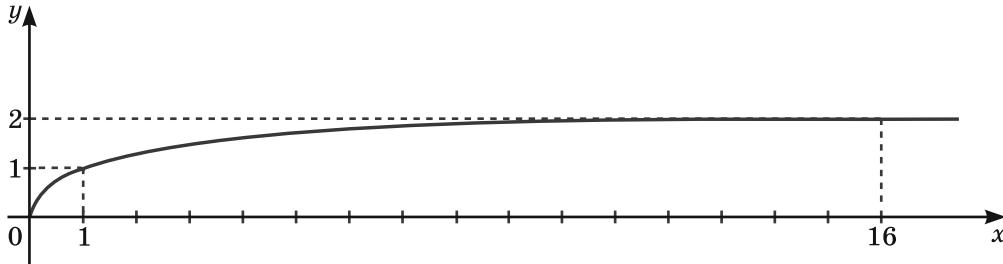


Рис. 5

Теперь сформулируем основные свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$.

1. Область определения функции $y = \sqrt[n]{x}$:

- при нечётном натуральном n : $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- при чётном натуральном n : $D(y) = [0; +\infty)$.

2. Область значений функции $y = \sqrt[n]{x}$:

- при нечётном натуральном n : $E(y) = (-\infty; +\infty)$;
- при чётном натуральном n : $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ равна нулю при $x = 0$.

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при нечётном натуральном n положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$.

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при чётном натуральном n положительна при $x > 0$.

4. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ строго возрастает на своей области определения, то есть на $(-\infty; +\infty)$ при нечётном натуральном n и на $[0; +\infty)$ при чётном натуральном n .

Глава 4, §1, п.4.1.4

Доказательство (методом от противного).

Если наше утверждение неверно, то найдутся x_1 и x_2 такие, что $x_1 > x_2$, но $\sqrt[n]{x_1} \leq \sqrt[n]{x_2}$ (при нечётном натуральном n), или $x_1 > x_2 \geq 0$, но $\sqrt[n]{x_1} \leq \sqrt[n]{x_2}$ (при чётном натуральном n ; в этом случае $0 \leq \sqrt[n]{x_1} \leq \sqrt[n]{x_2}$). Так как функция x^n строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ при нечётном натуральном n и строго возрастает на $[0; +\infty)$ при чётном натуральном n , то в любом случае $(\sqrt[n]{x_1})^n \leq (\sqrt[n]{x_2})^n$, то есть $x_1 \leq x_2$. А это противоречит тому, что $x_1 > x_2$. Значит, функция $y = \sqrt[n]{x}$ строго возрастает на своей области определения. ■

5. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при нечётном натуральном n нечётна, а при чётном натуральном n не является ни чётной, ни нечётной.

Доказательство.

1) Рассмотрим функцию $y = \sqrt[n]{x}$ при нечётном натуральном n . Её нечётность следует из того, что при всех x : $\sqrt[n]{-x} = \sqrt[n]{(-1) \cdot x} = \sqrt[n]{-1} \cdot \sqrt[n]{x} = (-1) \cdot \sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{x}$.

2) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при чётном натуральном n определена при $x \in [0; +\infty)$. Её область определения несимметрична относительно точки 0 на числовой прямой, поэтому она не может быть ни чётной, ни нечётной. ■

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, как и свойства любой другой функции, имеют своё применение. Например, свойство возрастания функции может быть сформулировано иначе: если $x_1 > x_2$ и n — нечётное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$; если $x_1 > x_2 \geq 0$ и n — чётное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$. Данное свойство было указано в пункте 4.1.1. (свойство VII) и использовалось нами для сравнения корней высших степеней.

K

76

Какие из данных выражений не имеют смысла?

$$\sqrt{-9}; \sqrt[3]{-8}; \sqrt[4]{-0,25}; \sqrt[7]{-2}; \sqrt[5]{-1}; \sqrt[6]{-81}.$$

77

Начертите график функций $y = \sqrt{x}$. Определите с его помощью приблизительные значения $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$. Сравните числа $\sqrt{3,6}$ и $\sqrt{3,9}$, используя график. Какое свойство функции при этом используется?

78

1) Объём куба со стороной a см составляет V см³. Запишите формулу зависимости a в см от V см³.

2) Можно ли вычислить число, если известен его куб? Запишите формулу, с помощью которой можно это сделать, обозначив искомое число буквой k , а его куб — буквой c .

3) Какой единой обобщенной формулой можно записать две предыдущие зависимости? Докажите, что эта зависимость является функциональной.

79

1) Задайте функцию $y = \sqrt[3]{x}$ таблично:

x	-8	$-\frac{1}{8}$	-1	0	1	$\frac{1}{8}$	8
y							

2) Рассмотрите функцию $y = \sqrt[4]{x}$. Чем отличается область определения этой функции от области определения функции $y = \sqrt[3]{x}$?

3) Задайте функцию $y = \sqrt[4]{x}$ таблично:

x	0	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{81}{16}$	16
y					

4) Постройте графики функций, используя полученные таблицы. Сравните их с графиками, изображёнными на с. 24, 25 учебника.

5) Какие общие свойства графиков вы можете отметить? В чём различие? Почему? Сопоставьте их со свойствами функций на с. 25, 26 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

80

Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{x-3}$; б) $y = \sqrt[3]{x} - 3$; в) $y = -\sqrt[3]{x+1}$.

81

Решите графически уравнение $\sqrt[3]{x} = 2 - x$.

82

Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} -2-x, & \text{если } x < -1 \\ \sqrt[3]{x}, & \text{если } x \geq -1 \end{cases}$$

83

Постройте график функции:

а) $y = 2 \cdot \sqrt[4]{x-2} + 1$; б) $y = |\sqrt[5]{x} - 1|$; в) $y = \sqrt[4]{|x|+1} - 1$.

π

84 Сократите дроби:

а) $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$; в) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$;
 б) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; г) $\frac{\sqrt{b}-a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$.

85

Упростите выражение $\frac{1-c}{\sqrt{c}} x^2 - 2x + \sqrt{c}$, если $x = \frac{\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}$.

86

Определите, на каких промежутках функция возрастает и убывает:

а) $y = 2\sqrt[3]{x} - 3|1 - \sqrt[3]{x}|$; б) $y = \sqrt[3]{x} + 2|1 - \sqrt[3]{x}|$.

δ

87 Постройте график функции:

а) $y = \sqrt[3]{x} + 2$; б) $y = \sqrt[3]{x+2}$; в) $y = -\sqrt[3]{x+1} + 1$.

88

Постройте график функции:

а) $y = |\sqrt[4]{x} - 1|$; б) $y = \sqrt[4]{|x|+1}$.

89

Упростите выражение $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}}$.

с

90* Докажите, что уравнение $\sqrt[3]{2-x^2} + \sqrt[3]{3-x^3} = 0$ не имеет действительных решений.



4.1.5*. Иррациональность чисел вида $\sqrt[n]{a}$



Среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной закономерностью.

Симон Стевин (1548–1620),
фламандский математик и инженер

Мы знаем, что числа \sqrt{a} , где a — натуральное число, не являющиеся полным квадратом, иррациональны. Доказательство было проведено для отдельных чисел, например для числа $\sqrt{2}$ (мы доказали, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2; существование действительного числа, квадрат которого равен 2, доказывается пока недоступными нам методами).

Докажем теперь в общем виде, что $\sqrt[n]{a}$, где a — натуральное число, не являющееся точной n -й степенью натурального числа, — иррациональное число. Докажем, точнее, что для такого a не существует рационального числа, n -я степень которого равна a .

Теорема 1. Пусть $a \in N$, $n \in N$. Тогда если x — рациональное число такое, что $x^n = a$, то x — целое число.

(Иными словами, если a — натуральное число, то $\sqrt[n]{a}$ есть целое либо иррациональное число; поэтому если a не является n -й степенью натурального числа, то $\sqrt[n]{a}$ не может быть рациональным числом.)

Прежде чем доказывать эту теорему, выясним, какими вообще могут быть рациональные корни алгебраических уравнений с целыми коэффициентами.

Теорема 2. Пусть r — рациональный корень уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n \in Z$, $a_0 \neq 0$, причем $r = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда p — делитель a_n , q — делитель a_0 .

Доказательство.

Так как $r = \frac{p}{q}$ — корень уравнения, то $a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \frac{p}{q} + a_n = 0$, то есть $a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \dots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$.

Так как $a_nq^n = -a_0p^n - a_1p^{n-1}q - \dots - a_{n-1}pq^{n-1}$, то $a_nq^n : p$. Но $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, значит, в разложении p и q на простые множители нет общих множителей. Так как $a_nq^n : p$, а q^n и p не имеют общих простых множителей, то все простые множители, входящие в разложение p , входят в разложение a_n с теми же или большими степенями, то есть $a_n : p$.

Аналогично $a_0 : q$ (это следует из равенства $a_0p^n = -a_1p^{n-1}q - \dots - a_{n-1}pq^{n-1} - a_nq^n$). ■

Пример.

Найти все рациональные корни уравнения $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$.

Решение.

Пусть $r = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, являющаяся корнем данного уравнения. Тогда из теоремы 2 следует, что p — делитель числа -2 , q — делитель числа 3 , $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Поэтому p может принимать значения $2; -2; 1; -1$; q может принимать значения 3 и 1 . Итого лишь 8 рациональных чисел могут быть корнями данного уравнения:

$$1; -1; 2; -2; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}.$$

Непосредственная проверка показывает, что число $\frac{2}{3}$ удовлетворяет уравнению, остальные числа — нет. Уравнение $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ имеет единственный рациональный корень $r = \frac{2}{3}$.

Вернемся к доказательству теоремы 1.

Доказательство.

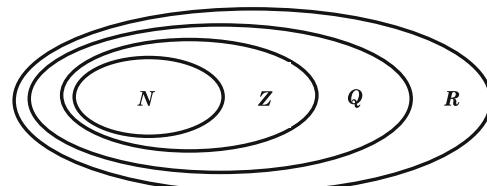
Пусть несократимая дробь $r = \frac{p}{q}$ является корнем уравнения $x^n - a = 0$ (то есть рациональное число r является корнем n -й степени из a). По теореме 2, q — делитель коэффициента $a_0 = 1$, то есть r — целое число. ■

Итак, все числа вида $\sqrt[n]{a}$, где a натуральное и не является n -й степенью натурального числа, иррациональны. Иррациональными являются числа $\sqrt{7}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[5]{11}$ и т.д.

K

91

Рассмотрите диаграмму. Какие множества представлены на диаграмме? Покажите, где располагается множество иррациональных чисел.



92

Докажите иррациональность числа:

а) $\sqrt[5]{11}$; б*) $\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$.

93

Число r — рациональное, α и β — иррациональные числа. Рациональным или иррациональным является число:

а) $\frac{\alpha}{3}$; б) β^2 ; в) $\alpha + r$; г) $\alpha \cdot \beta$; д) $\alpha + \beta$; е) $\frac{\alpha}{\beta}$?

Для всех ли случаев получилось дать однозначный ответ?

94

1) Чем похожи эти уравнения? Какой общий вид всех таких уравнений?

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; б) $x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$; в) $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$.

2) Решите квадратное уравнение при помощи теоремы, обратной теореме Виета. Объясните, с каких чисел вы начинали подбор корней этого уравнения. При объяснении используйте понятие «делитель». Объясните, среди каких чисел нужно искать рациональные корни этого и других квадратных уравнений.

Глава 4, §1, п.4.1.5

3) Попробуйте найти рациональные корни остальных уравнений. Как вы думаете, среди каких чисел следует искать рациональные корни второго уравнения? Продолжите свою гипотезу подстановкой найденных чисел.

4) Познакомьтесь с теоремой 2 и примените её для поиска рациональных корней третьего уравнения. Сопоставьте ход своего решения с примером на с. 29.

95

Найдите все рациональные корни уравнения:

a) $3x^3 + 8x^2 + 9x - 4 = 0$;
б) $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 15x + 10 = 0$.

Π

96 Постройте график функции:

a) $y = \sqrt[3]{x+1}$; б) $y = \sqrt[3]{|x|+1}$; в) $y = |\sqrt[3]{x+1}|$.

97

Постройте график уравнения

$$|y^2 - 2x^2| = 2x^2.$$

98

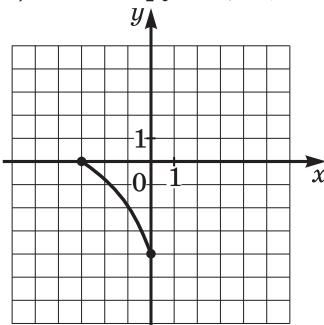
Исследуйте на чётность и нечётность функцию:

a) $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot x + 2$; б) $y = \frac{|x|+2}{x^4} + 4$; в) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \cdot |x|$.

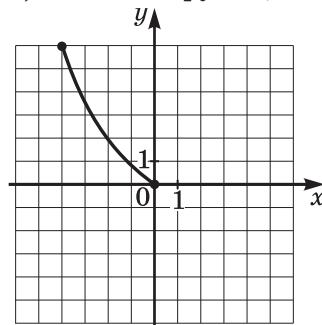
99

Достройте график:

а) чётной функции,



б) нечётной функции.



Д

100

Докажите иррациональность числа:

а) $\sqrt[6]{36}$; б*) $\sqrt[3]{5} + \sqrt{3}$.

101

Найдите все рациональные корни уравнения:

а) $4x^3 + 5x^2 + 13x + 3 = 0$;
б) $12x^4 - 20x^3 - 11x^2 + 5x + 2 = 0$.

102

Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x-1}$; б) $y = \sqrt{|x|-1}$; в) $y = \sqrt{|x-1|}$.

103

Исследуйте на чётность и нечётность функцию:

а) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$; б) $y = \frac{x^2-1}{\sqrt[5]{x^3 \cdot x}}$; в) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot x^2$.

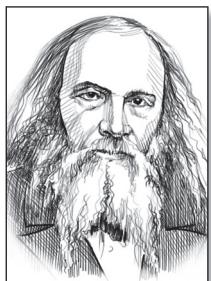
С

104*

Целые числа m и n таковы, что сумма $\sqrt{n} + \sqrt[3]{m}$ целая. Верно ли, что оба слагаемых целые?

§ 2. Решение простейших иррациональных уравнений и неравенств

4.2.1. Иррациональные уравнения



...Справедливость требует не тому отдать наибольшую научную славу, кто первый высказал известную истину, а тому, кто умел убедить в ней других, показал её достоверность и сделал её применимо в науке.

Д. И. Менделеев (1834–1907),
русский учёный-энциклопедист: химик, физик,
геолог, метеоролог, воздухоплаватель

Мы уже знаем, что, изучая новый вид уравнений, описывающих различные классы задач, возникающих на практике, мы расширяем свои возможности по их решению. В 8 классе мы встречались с уравнениями, содержащими переменную под знаком корня. Однако нам удавалось путем использования определения арифметического квадратного корня или удачной замены сводить их к известному нам виду – линейному или квадратному уравнениям.

Например:

1) $\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 6^2 \Leftrightarrow x = 36$ (по определению арифметического квадратного корня).

2) $x + \sqrt{x} - 12 = 0$, пусть $\sqrt{x} = t$ ($t \geq 0$), тогда $t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3; \\ t = -4. \end{cases}$

Отсюда, выбирая неотрицательное значение t , имеем $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$.

Но эти приёмы работают не всегда. В данном пункте мы подробно изучим способы решения уравнений с переменной под знаком корня, причём не только второй степени, но и выше. Сначала введём определение.

Определение 1. Уравнение, в котором алгебраическое выражение, содержащее переменную, находится под знаком корня, называется *иррациональным*.

Пример 1. Решить уравнение:

а) $\sqrt{5x - 3x^2 + 2} = 2$; б) $\sqrt[3]{x^2 + 4x - 50} = 3$.

Решение.

а) Ясно, что по определению арифметического квадратного корня уравнение $\sqrt{5x - 3x^2 + 2} = 2$ равносильно уравнению $5x - 3x^2 + 2 = 4$, то есть квадратному уравнению $3x^2 - 5x + 2 = 0$, которое имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}; 1\right\}$.

б) Ясно, что по определению кубического корня уравнение $\sqrt[3]{x^2 + 4x - 50} = 3$ равносильно $x^2 + 4x - 50 = 27$, то есть $x^2 + 4x - 77 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 77}$, то есть $x_1 = 7$, $x_2 = -11$.

Ответ: $\{-11; 7\}$.

Глава 4, §2, п.4.2.1

Замечание. Так как мы использовали при решении уравнения равносильное преобразование, то нет необходимости проводить проверку полученных корней подстановкой в уравнение. Конечно, для контроля правильности вычислений такая проверка иногда бывает полезной, но здесь необходимости в этом нет.

Отметим, что, используя определение корня n -й степени, мы фактически возводили обе части уравнения в n -ю степень, избавившись тем самым от знака корня. Используем эту идею для решения следующих уравнений.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\text{а) } \sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{5x + 8}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{-2x - 1} = \sqrt[3]{x^2 - 36}.$$

Решение.

а) Возведём обе части уравнения $\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{5x + 8}$ в квадрат. Получим $(\sqrt{x^2 - 16})^2 = (\sqrt{5x + 8})^2$. Тогда по основному тождеству арифметического корня это уравнение сведётся к квадратному $x^2 - 16 = 5x + 8$. А его решать мы умеем.

Это уравнение $x^2 - 5x - 24 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 8$, $x_2 = -3$.

Обратим внимание, что в уравнении, полученном нами с помощью возвведения в квадрат, ограничения, связанные с понятием корня чётной степени, уже не действуют. Значит, нужно сделать проверку. Подставим найденные корни в исходное уравнение.

При $x = 8$ получим $\sqrt{8^2 - 16} = \sqrt{5 \cdot 8 + 8} \Leftrightarrow \sqrt{48} = \sqrt{48}$ (истинно).

При $x = -3$ получим $\sqrt{(-3)^2 - 16} = \sqrt{5 \cdot (-3) + 8} \Leftrightarrow \sqrt{-9} = \sqrt{-9}$. Это равенство не имеет смысла, так как противоречит определению арифметического квадратного корня.

Значит, $x = 8$ – корень исходного уравнения, а $x = -3$ – нет (это посторонний корень, появившийся при неравносильном преобразовании – возведении обеих частей уравнения в квадрат).

Замечание. Для отсеивания постороннего корня вместо подстановки можно было проверить, является ли хотя бы одно из выражений $x^2 - 16$ и $5x + 8$ неотрицательным для полученных корней (тогда второе будет неотрицательным в силу их равенства). Так, при $x = 8$ подкоренное выражение $x^2 - 16$ принимает положительное значение, а при $x = -3$ – отрицательное.

Ответ: 8.

Итак, возведение в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ не является равносильным преобразованием. Конечно, $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$, но обратное утверждение верно лишь в случае $a = b \geq 0$. Поэтому при решении уравнений таким способом необходимо делать проверку на наличие посторонних корней.

б) Возведем обе части уравнения $\sqrt[3]{-2x - 1} = \sqrt[3]{x^2 - 36}$ в третью степень.

$$\sqrt[3]{-2x - 1} = \sqrt[3]{x^2 - 36} \Leftrightarrow -2x - 1 = x^2 - 36, \text{ так как } \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a = b.$$

Решая квадратное уравнение $x^2 + 2x - 35 = 0$, получим: $x_1 = 5$, $x_2 = -7$. Так как преобразование, использованное нами, равносильное, то проверку делать не нужно.

Ответ: $\{-7; 5\}$.

Можем записать следующие *схемы решения иррациональных уравнений*:

$$\sqrt{f(x)} = a \quad (a \geq 0) \Leftrightarrow f(x) = a^2;$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \geq 0;$$

$$\sqrt[3]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^3;$$

$$\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Пример 3. Решить уравнение:

а) $x+17=10\sqrt{x-4}$; б) $x=32+2\sqrt{x+3}$; в) $x+1=\sqrt[3]{x^3+2x^2+5x+100}$.

Решение.

а) 1-й способ. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим уравнение $(x+17)^2 = 100(x-4)$. Решим полученное квадратное уравнение: $x^2 + 34x + 289 = 100x - 400 \Leftrightarrow x^2 - 66x + 689 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 53, x_2 = 13$.

Так как использованное нами преобразование $a = \sqrt{b} \Rightarrow a^2 = b$ равносильно, только если $a \geq 0$, нужно сделать проверку на наличие посторонних корней.

При $x = 53$ и $x = 13$ выражение $x + 17 > 0$, и возведение в квадрат обеих частей уравнения не приведёт к появлению посторонних корней (проверять неотрицательность выражения под знаком корня не имеет смысла, так как из выполнения равенства $b = a^2$ автоматически следует, что $b \geq 0$).

Заметим, что проверку можно было сделать и непосредственной подстановкой корней в исходное уравнение.

При решении подобных уравнений можно «избавиться» от знака радикала и по-другому – хорошо знакомым нам методом введения новой переменной.

б) 2-й способ. Сделаем замену $t = \sqrt{x-4}$ (обращаем внимание на то, что $t \geq 0$). Тогда $t^2 = x - 4$ и $x = t^2 + 4$. Уравнение примет вид $t^2 + 4 + 17 = 10t$, т. е. $t^2 - 10t + 21 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: $t_1 = 7, t_2 = 3$. Проверим условие $t \geq 0$ – оба корня неотрицательны. Перейдём к «старой» переменной: $x_1 = 7^2 + 4 = 53, x_2 = 3^2 + 4 = 13$.

Ответ: {13, 53}.

в) 1-й способ. Возведем обе части уравнения в квадрат. Учитывая, что это преобразование будет равносильным только при неотрицательности левой части уравнения, можем записать следующую равносильность:

$$x - 32 = 2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-32)^2 = 4(x+3); \\ x \geq 32. \end{cases}$$

Квадратное уравнение, входящее в систему, имеет вид $x^2 - 64x + 1024 = 4x + 12$, то есть $x^2 - 68x + 1012 = 0$. Оно имеет корни $x_{1,2} = 34 \pm \sqrt{1156 - 1012} = 34 \pm 12$, т. е. $x_1 = 46, x_2 = 22$. Но только первый из этих корней удовлетворяет условию $x \geq 32$, поэтому только он является корнем исходного уравнения.

Заметим, что это уравнение тоже можно было решить введением новой переменной.

2-й способ. Сделаем замену $\sqrt{x+3} = t$ ($t \geq 0$); тогда $x = t^2 - 3$. Уравнение примет вид $t^2 - 3 = 32 + 2t$, то есть $t^2 - 2t - 35 = 0$, откуда $t_1 = 7, t_2 = -5$. Учитывая, что $t \geq 0$, подходит только положительный корень $t = 7$.

Перейдем к «старой» переменной: $x = 7^2 - 3 = 46$.

Ответ: 46.

в) Так как $a = \sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a^3 = b$, то исходное уравнение равносильно $(x+1)^3 = x^3 + 2x^2 + 5x + 100$ (возведение обеих частей уравнения в куб является равносильным преобразованием). Уравнение преобразуется к виду

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 2x^2 + 5x + 100 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 99 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = -9, x_2 = 11$.

Ответ: {-9, 11}.

Глава 4, §2, п.4.2.1

Можем записать следующие *схемы решений иррациональных уравнений*:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2; \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \quad \sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^3.$$

Обратим внимание на то, что при решении уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ мы не находили область допустимых значений (ОДЗ) уравнения. Областью допустимых значений уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (если функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду определены) является множество решений неравенства $f(x) \geq 0$. Но после возвведения в квадрат получаем уравнение $f(x) = (g(x))^2$, для решений которого неравенство $f(x) \geq 0$ выполняется автоматически. А вот условие $g(x) \geq 0$ проверять нужно. Заметим, что вместо этой проверки можно подставить корни в исходное уравнение, но эта процедура может быть очень громоздкой (например, если полученные корни иррациональны).

Полученные нами схемы для квадратного корня сохраняются для корней любой чётной степени, а схема кубического корня – для корней любой нечётной степени.

Итак, решить иррациональное уравнение, содержащее корни n -й степени, можно следующими способами:

1-й способ. Для уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$ использовать определение корня n -й степени.

2-й способ. Для уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ возвести обе части уравнения в n -ю степень, добиваясь перехода к уравнению без знака корня. При чётном n необходимо учитывать возможность появления посторонних корней.

3-й способ. Провести замену переменной $\sqrt[n]{f(x)} = t$, учитывая в ходе дальнейшего решения, что $t \geq 0$ при чётных n .

* * *

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} + x = 7$.

Решение.

Решение этого уравнения последовательным возведением в квадрат сводится к уравнению четвертой степени с последующей проверкой, поэтому проще поступить иначе. Заметим, что уравнение имеет корень $x = 4$.

Покажем, что других корней уравнение не имеет. Левая часть этого уравнения определена при $x \geq 3$, и все три слагаемых в левой части являются строго возрастающими функциями на $[3; +\infty)$. Поэтому левая часть уравнения $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-3} + x$ является строго возрастающей функцией на $[3; +\infty)$. Но $f(4) = 7$, значит, при $x > 4$ выполняется неравенство $f(x) > f(4) = 7$, а при $3 \leq x < 4$ выполняется неравенство $f(x) < f(4) = 7$. Значит $f(x) = 7 \Leftrightarrow x = 4$, то есть единственным решением уравнения является число $x = 4$.

Ответ: 4.

Это решение основано на том факте, что строго возрастающая функция принимает каждое свое значение ровно 1 раз. Поэтому если удастся угадать одно решение такого уравнения, то оно будет единственным.

Отметим, что такой метод применяется не только для иррациональных уравнений, но и для уравнений более широких классов.

K

105 Какие из утверждений являются неверными?

- a) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow a = b$; б) $a = b \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$; в) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$;
 г) $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b \geq 0 \end{cases}$; д) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geq 0 \end{cases}$; е) $a = \sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a^3 = b$.

106 1) Решите уравнения $\sqrt{x} = 2$ и $\sqrt[3]{x} = -2$, используя известное понятие корня n -й степени.

2) По аналогии решите уравнение $\sqrt[3]{x^2 + 7} = 2$.

3) Как можно по-другому описать выполненное в ходе решения преобразование:

$$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^2,$$

$$\sqrt[3]{x} = -2 \Leftrightarrow x = (-2)^3,$$

$$\sqrt[3]{x^2 + 7} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 7 = 2^3,$$

используя понятие «возведение в степень»? Поясните, почему это преобразование является равносильным.

107 1) С помощью какого преобразования можно свести уравнение $\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x + 4}$ к уравнению, способ решения которого уже известен? Решите уравнение и сделайте проверку. Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным.

2) С помощью какого преобразования можно свести уравнение $\sqrt{12 - 4x} = x$ к уравнению, способ решения которого уже известен? Решите уравнение и сделайте проверку. Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным.

3) Можно ли применять использованные вами способы решения для всех иррациональных уравнений такого вида? Составьте правило решения таких уравнений и сопоставьте его со схемой на с. 34.

108 Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x^2 - 3x + 10} = 3$; б) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = -2$; в) $\sqrt[3]{x^2 - 11} = -2$.

109 Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{2x - 6}$; б) $\sqrt[3]{x^2 + x} = \sqrt[3]{-2x - 2}$.

110 Решите уравнение:

а) $2x = 1 + \sqrt{x^2 - 5x + 5}$; б) $\sqrt[3]{x^2 - 5x - 14 - x^3} + x = 0$.

111 Решите уравнение $\sqrt{2x} + \sqrt{x-1} = 9 - 3x$.

П **112** Данна последовательность $a_n = 9n - 5n^2 + 2$. Сколько в этой последовательности положительных членов? Найдите наибольший член последовательности.

113 Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена: $a_n = \frac{4n-1}{3n+2}$, $n \in N$. Докажите,

что $a_n < 1 \frac{1}{3}$ при всех $n \in N$ и последовательность (a_n) является возрастающей.

114 Докажите иррациональность числа:

а) $\sqrt[4]{4}$; б*) $\sqrt[5]{3} - \sqrt{3}$.

115 Найдите все рациональные корни уравнения $x^3 - 8x^2 + 9x - 2 = 0$.

Глава 4, §2, п.4.2.2

Д

116 Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 7} = -3$; б) $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = 1$; в) $\sqrt[3]{x^2 + 2x - 7} = 2$.

117

Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 - 6x + 7} = \sqrt{x - 3}$; б) $\sqrt[3]{x^2 - 5} = \sqrt[3]{1 - x}$.

118

Решите уравнение:

а) $x + 1 = \sqrt{x + 13}$; б) $\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 6x - 3} = x + 1$.

119

Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{2x} + x = 7$.

120

Дана последовательность $a_n = 3n^2 - 5n - 12$. Сколько в этой последовательности отрицательных членов? Найдите наименьший член последовательности.

121

Последовательность (a_n) задана формулой n -го члена: $a_n = \frac{3n+1}{4n-3}$, $n \in N$. Докажите, что $a_n > 0,75$ при всех $n \in N$ и последовательность (a_n) является убывающей.

122

Докажите иррациональность числа:

а) $\sqrt[5]{5}$; б*) $\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}$.

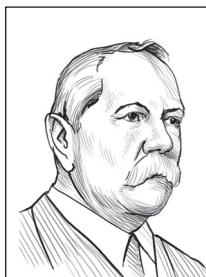
123

Найдите все рациональные корни уравнения $-2x^3 - 3x^2 + 5x + 6 = 0$.

С

124* Решите неравенство $[x] \cdot \{x\} < x - 1$.

4.2.2.* Иррациональные неравенства



...Человека, умеющего наблюдать и анализировать, обмануть просто невозможно. Его выводы будут безошибочны, как теоремы Евклида.

Конан Дойл (1859–1930),
английский писатель

В предыдущем пункте мы научились решать простейшие иррациональные уравнения. Естественно, помимо иррациональных уравнений, рассмотреть и аналогичные неравенства.

Определение 1. Неравенство, в котором алгебраическое выражение, содержащее переменную, находится под знаком корня, называется *иррациональным*.

Так же как и при решении иррациональных уравнений, при решении иррациональных неравенств мы будем использовать возвведение обеих частей неравенства в нужную нам степень. При этом при возвождении обеих частей неравенства в чётную степень будем следить за знаками левой и правой частей, чтобы отслеживать равносильность выполненных нами преобразований. Начнём с самых простых примеров.

Пример 1. Решить неравенство:

а) $\sqrt{3x+5} \geq 2$; б) $\sqrt{4x-1} < 2$;
 в) $\sqrt[3]{5x+1} \geq 3$; г) $\sqrt[3]{2x-1} < -5$.

Решение.

а) Если b – положительное число, то $\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow a \geq b^2$ (a обязано быть неотрицательным, но для всех a , удовлетворяющих неравенству $a \geq b^2$, автоматически выполняется условие $a \geq 0$). Поэтому $\sqrt{3x+5} \geq 2 \Leftrightarrow 3x+5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

б) Если b – положительное число, то $\sqrt{a} < b \Rightarrow a < b^2$. Равносильности здесь уже нет, так из выполнения неравенства $a < b^2$ вовсе не следует, что $a \geq 0$, и a может быть отрицательным. А вот если $a \geq 0$, то $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow a < b^2$. Поэтому в общем случае

$$\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b^2; \\ a \geq 0, \end{cases} \text{ то есть } \sqrt{a} < b \Leftrightarrow 0 \leq a < b^2.$$

Итак, $\sqrt{4x-1} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq 4x-1 < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{4}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

в) $\sqrt[3]{a} \geq b \Leftrightarrow a \geq b^3$ (функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей числовой прямой), поэтому $\sqrt[3]{5x+1} \geq 3 \Leftrightarrow 5x+1 \geq 27 \Leftrightarrow x \geq \frac{26}{5}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{26}{5}; +\infty\right)$.

г) $\sqrt[3]{a} < b \Leftrightarrow a < b^3$; поэтому $\sqrt[3]{2x-1} < -5 \Leftrightarrow 2x-1 < -125 \Leftrightarrow x < -62$.

Ответ: $x \in (-\infty; -62)$.

Как мы знаем, возвведение в квадрат является неравносильным преобразованием в случае, когда одна из частей неравенства отрицательна. Рассмотрим примеры, показывающие, как решаются иррациональные неравенства в этом случае.

Пример 2. Решить неравенство:

а) $\sqrt{4x+3} \leq -2$; б) $\sqrt{5x-4} > -6$.

Решение.

а) Если b – отрицательное число, то неравенство $\sqrt{a} \leq b$ невозможно, так как a обязано быть неотрицательным, и для всех $a \geq 0$ выполнено $\sqrt{a} \geq 0$.

Ответ: $x \in \emptyset$.

б) Если b – отрицательное число, то $\sqrt{a} > b \Leftrightarrow a \geq 0$ (a обязано быть неотрицательным, и тогда $\sqrt{a} \geq 0 > b$). Поэтому $5x-4 \geq 0$, $x \geq \frac{4}{5}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$.



Глава 4, §2, п.4.2.2

Рассмотрим неравенства, где под знаком корня стоит квадратный трёхчлен.

Пример 3. Решить неравенство:

$$\text{а)} \sqrt{3x^2 - 10x + 7} \geq 2; \quad \text{б)} \sqrt{x^2 - 35x} < 6; \quad \text{в)} \sqrt[3]{x^2 - x} \leq 4; \quad \text{г)} \sqrt[3]{x^2 + 9x} > -2.$$

Решение.

$$\text{а)} \sqrt{3x^2 - 10x + 7} \geq 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 7 \geq 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 \geq 0.$$

Квадратный трёхчлен имеет корни $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

$$\text{б)} \sqrt{x^2 - 35x} < 6 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 35x < 36 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 35x \geq 0; \\ x^2 - 35x < 36. \end{cases}$$

Квадратный трёхчлен $x^2 - 35x$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 35$, поэтому неравенство $x^2 - 35x \geq 0$ имеет множество решений $(-\infty; 0] \cup [35; +\infty)$. Далее, $x^2 - 35x < 36 \Leftrightarrow x^2 - 35x - 36 < 0$. Квадратный трёхчлен $x^2 - 35x - 36$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 36$, поэтому неравенство $x^2 - 35x - 36 < 0$ имеет множество решений $x \in (-1; 36)$. Пересекая полученные множества решений, получаем ответ: $x \in (-1; 0] \cup [35; 36)$.

Ответ: $x \in (-1; 0] \cup [35; 36)$.

$$\text{в)} \sqrt[3]{x^2 - x} \leq 4 \Leftrightarrow x^2 - x \leq 64 \Leftrightarrow x^2 - x - 64 \leq 0. \text{ Квадратный трёхчлен } x^2 - x - 64 \text{ имеет корни } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{257}}{2}.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{257}}{2}; \frac{1 + \sqrt{257}}{2}\right]$.

$$\text{г)} \sqrt[3]{x^2 + 9x} > -2 \Leftrightarrow x^2 + 9x > -8 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 8 > 0. \text{ Квадратный трёхчлен имеет корни } x_1 = -1, x_2 = -8.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -8) \cup (-1; +\infty)$.

Итак, мы можем использовать следующие *схемы решений иррациональных неравенств*:

$$\sqrt{f(x)} > a \quad (a \geq 0) \Leftrightarrow f(x) > a^2;$$

$$\sqrt{f(x)} > a \quad (a < 0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0;$$

$$\sqrt{f(x)} \geq a \quad (a \geq 0) \Leftrightarrow f(x) \geq a^2;$$

$$\sqrt{f(x)} \geq a \quad (a < 0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0;$$

$$\sqrt{f(x)} < a \quad (a > 0) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < a^2;$$

$$\sqrt{f(x)} \leq a \quad (a < 0) \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

$$\sqrt{f(x)} \leq a \quad (a \geq 0) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq a^2;$$

$$\sqrt{f(x)} \leq a \quad (a \leq 0) \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\sqrt[3]{f(x)} > a \Leftrightarrow f(x) > a^3;$$

$$\sqrt[3]{f(x)} < a \Leftrightarrow f(x) < a^3;$$

$$\sqrt[3]{f(x)} \geq a \Leftrightarrow f(x) \geq a^3;$$

$$\sqrt[3]{f(x)} \leq a \Leftrightarrow f(x) \leq a^3.$$

* * *

Мы познакомились с простейшими иррациональными неравенствами. Рассмотрим примеры решения более сложных неравенств.

Пример 4. Решить неравенство:

$$\text{а)} (3x^2 - 16x + 21)\sqrt{2x+5} \leq 0; \quad \text{б)} (2x+3)\sqrt{6+x-x^2} \geq 0; \quad \text{в)} \sqrt{4x+7} < \sqrt{x^2 - 2x}.$$

Решение.

а) Заметим, что $\sqrt{2x+5} \geq 0$ для всех значений x из области допустимых значений переменной, т. е. для всех $x \geq -\frac{5}{2}$. Но если $x > -\frac{5}{2}$, то $\sqrt{2x+5} > 0$, и исходное неравенство равносильно $3x^2 - 16x + 21 \leq 0$. Квадратный трёхчлен имеет корни $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 3 \cdot 21}}{3}$, т.е. $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{7}{3}$; множество решений неравенства $x \in \left[\frac{7}{3}; 3 \right]$. Все эти числа удовлетворяют условию $x > -\frac{5}{2}$, поэтому являются решениями исходного неравенства. Если $x = -\frac{5}{2}$, то левая часть неравенства равна 0, и неравенства выполняются.

Ответ: $x \in \left\{ -\frac{5}{2} \right\} \cup \left[\frac{7}{3}; 3 \right]$.

б) Заметим, что $\sqrt{6+x-x^2} \geq 0$ при всех x из области допустимых значений переменной, т. е. для всех решений неравенства $6+x-x^2 \geq 0$, т. е. для всех $x \in [-2; 3]$. Но при $x \in (-2; 3)$ выполняется неравенство $6+x-x^2 > 0$, и исходное неравенство равносильно $2x+3 \geq 0$, т. е. $x \geq -\frac{3}{2}$. Пересекая с интервалом $(-2; 3)$, получаем $x \in \left[-\frac{3}{2}; 3 \right)$. Все эти числа являются решениями исходного неравенства. А если $x = -2$ или $x = 3$, то левая часть неравенства равна 0, и неравенство выполняется.

Ответ: $x \in \{-2\} \cup \left[-\frac{3}{2}; 3 \right)$.

в) $\sqrt{4x+7} < \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow 0 \leq 4x+7 < x^2-2x$ (попробуйте объяснить, почему это так).

Далее, $0 \leq 4x+7 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{4}$; $4x+7 < x^2-2x \Leftrightarrow x^2-6x-7 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$.

Пересекая полученные множества решений, получим ответ: $x \in \left[-\frac{7}{4}; -1 \right) \cup (7; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{7}{4}; -1 \right) \cup (7; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство:

а) $\sqrt{x+1} > x-1$; б) $\sqrt{5-x^2} \geq x+1$; в) $\sqrt{x+5} < x-1$; г) $\sqrt{x^2-5} \leq 2x-4$.

Решение.

а) 1-й способ. В правой части неравенства стоит функция, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому возведение в квадрат будет неэквивалентным преобразованием. Необходимо рассмотреть два случая: $x-1 < 0$ и $x-1 \geq 0$.

1) $x-1 < 0$. Тогда левая часть неравенства неотрицательна при всех таких x из ОДЗ: $x+1 \geq 0$, а правая – отрицательна, и неравенство выполнено. Получаем систему $\begin{cases} x-1 < 0; \\ x+1 \geq 0, \end{cases}$ решение которой $-1 \leq x < 1$.

2) $x-1 \geq 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $x+1 > (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x < 0$. При этом подкоренное выражение $x+1$ автоматически будет неотрицательным. Получаем систему $\begin{cases} x-1 \geq 0; \\ x^2-3x < 0, \end{cases}$ решение которой $1 \leq x < 3$.

Объединяя найденные множества решений, получаем ответ: $x \in [-1; 3)$.

2-й способ. Сделаем замену $t = \sqrt{x+1}$ ($t \geq 0$). Тогда $x = t^2 - 1$. Неравенство примет вид $t > t^2 - 2$, т.е. $t^2 - t - 2 < 0$. Это квадратное неравенство имеет решение $-1 < t < 2$. Учитывая $t \geq 0$, получаем $0 \leq t < 2$. Значит, $0 \leq \sqrt{x+1} < 2$. Получаем неравенство $0 \leq x+1 < 4$, решение которого $-1 \leq x < 3$.

Ответ: $x \in [-1; 3)$.

Глава 4, §2, п.4.2.2

б) Аналогично п. а) примера нужно рассмотреть два случая: $x+1 < 0$ и $x+1 \geq 0$.

1) $x+1 < 0$. Тогда левая часть неравенства неотрицательна при всех таких x из ОДЗ:

$$5-x^2 \geq 0. \text{ Получаем систему } \begin{cases} x+1 < 0; \\ 5-x^2 \geq 0, \end{cases} \text{ решение которой } -\sqrt{5} \leq x < -1.$$

2) $x+1 \geq 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат:

$$5-x^2 \geq (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+x-2 \leq 0. \text{ Получаем систему } \begin{cases} x+1 \geq 0; \\ x^2+x-2 \leq 0, \end{cases} \text{ решение которой } -1 \leq x \leq 1.$$

Объединяя найденные множества решений, получаем ответ: $x \in [-\sqrt{5}; 1]$.

Ответ: $x \in [-\sqrt{5}; 1]$.

в) 1-й способ. Аналогично п. а) примера нужно рассмотреть два случая: $x-1 < 0$ и $x-1 \geq 0$.

1) $x-1 < 0$. Тогда при всех таких x из ОДЗ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому в этом случае решений нет.

2) $x-1 \geq 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат:

$$x+5 < (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x-4 > 0. \text{ При этом необходимо проверить, что подкоренное выражение } x+5 \text{ будет неотрицательным (т.е. } x+5 \geq 0). \text{ Получаем систему } \begin{cases} x-1 \geq 0; \\ x+5 \geq 0; \\ x^2-3x-4 > 0, \end{cases} \text{ решение которой } x > 4.$$

2-й способ. Сделаем замену $t = \sqrt{x+5}$ ($t \geq 0$). Тогда $x = t^2 - 5$. Неравенство примет вид: $t < t^2 - 6$, $0 < t^2 - t - 6$, и, с учетом $t \geq 0$, получаем: $3 < t$, $3 < \sqrt{x+5}$, $9 < x+5$.

Ответ: $x \in (4; +\infty)$.

г) Аналогично п. а) примера нужно рассмотреть два случая: $2x-4 < 0$ и $2x-4 \geq 0$.

1) $2x-4 < 0$. Тогда при всех таких x из ОДЗ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому в этом случае решений нет.

2) $2x-4 \geq 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $x^2-5 \leq (2x-4)^2 \Leftrightarrow 3x^2-16x+21 \geq 0$. При этом необходимо проверить, что подкоренное выражение x^2-5 будет неотрицательным (т.е. $x^2-5 \geq 0$). Получаем систему

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0; \\ x^2-5 \geq 0; \\ 3x^2-16x+21 \geq 0, \end{cases} \text{ решение которой } \left[\sqrt{5}; \frac{7}{3} \right] \cup [3; +\infty).$$

Ответ: $x \in \left[\sqrt{5}; \frac{7}{3} \right] \cup [3; +\infty)$.

Мы можем использовать следующие *схемы решения иррациональных неравенств* такого вида:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0; \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0; \\ f(x) > g^2(x); \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0; \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0; \\ f(x) \geq g^2(x); \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0; \\ f(x) \geq 0; \\ f(x) < g^2(x); \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) \geq 0; \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$$

Используя свойства функции (монотонность, ограниченность) мы можем решать и более сложные неравенства.

В предыдущем пункте, используя свойства монотонности, мы решили достаточно сложное уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} + x = 7$ (п. 4.2.1, пример 4).

Изменим в этом уравнении знак равенства на знак \leqslant и решим полученное неравенство.

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} + x \leqslant 7$.

Решение:

Пусть $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-3} + x$.

Заметим, что $f(4) = 7$; $f(x)$ строго возрастает на области определения $[3; +\infty)$, поэтому $f(x) \leqslant 7 \Leftrightarrow 3 \leqslant x \leqslant 4$.

Ответ: $[3; 4]$.

При решении неравенств могут помочь неравенства о средних.

Пример 7. Решить неравенство $x^3 + \frac{3}{x} \leqslant 4$.

Решение: Левая часть неравенства определена при $x \neq 0$.

Если $x < 0$, то $f(x) = x^3 + \frac{3}{x} < 0$, и нужное неравенство выполнено.

Если $x > 0$, то $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x}$; к первым двум слагаемым применим неравенство Коши между средним арифметическим и среднем геометрическим двух положительных чисел: $x^3 + \frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x^3 \cdot \frac{1}{x}} = 2x$; равенство достигается в случае $x^3 = \frac{1}{x}$, т. е. $x^4 = 1$ (так как $x > 0$, то $x = 1$).

Далее, снова применяя неравенство Коши, имеем:

$f(x) \geqslant 2x + \frac{2}{x} \geqslant 2\sqrt{2x \cdot \frac{2}{x}} = 4$, равенство достигается при $2x = \frac{2}{x}$, т. е. опять-таки при $x = 1$.

Итак, $f(x) \geqslant 4$ при $x > 0$ (функция ограничена снизу); равенство достигается при $x = 1$. Поэтому в случае $x > 0$ неравенство $f(x) \leqslant 4$ имеет место только при $x = 1$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$.

Замечание. Это неравенство можно было решить и обычным способом – методом интервалов.

K

125 Какие из утверждений являются неверными?

- | | | |
|---|--|--|
| a) $b^2 \geqslant 0$; | в) $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow a < b^2$; | д) $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b^2; \\ a \geqslant 0; \end{cases}$ |
| б) $\sqrt{a} \geqslant b \Leftrightarrow a \geqslant b^2$; | г) $\sqrt[3]{a} < b \Leftrightarrow a < b^3$; | е) $\sqrt[3]{a} > b \Leftrightarrow a > b^3$. |

126 Обоснуйте свой ответ, приводя контрпример.

1) С помощью какого преобразования можно привести неравенство $\sqrt{3x+5} \geqslant 2$ к неравенству, способ решения которого известен? Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным. Решите неравенство и сопоставьте ход решения с решением, изложенным на с. 37.

2) С помощью какого преобразования можно привести неравенство $\sqrt{4x-1} < 2$ к неравенству, способ решения которого известен? Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным. Решите неравенство и сопоставьте ход решения с решением, изложенным на с. 37.

3) Можно ли применять использованные вами способы решения для всех иррациональных неравенств такого вида? Познакомьтесь со способом решения аналогичных неравенств со знаком корня 3-й степени, разобрав решение остальных неравенств из примера 1.

Глава 4, §2, п.4.2.2

127 Решите неравенство:

- а) $\sqrt{7x+1} \geq 2$; в) $\sqrt{2x+1} < 2$; д) $\sqrt[3]{3x-2} > 3$.
 б) $\sqrt{2x-1} \leq -1$; г) $\sqrt[3]{x-1} \leq -2$;

128 Решите неравенство:

- а) $\sqrt{5x+7-2x^2} > 2$; б) $\sqrt{x^2-4} \leq 3$; в) $\sqrt[3]{x^2-2x+1} > 2$.

129 Решите неравенство:

- а) $(x^2-x-6)\sqrt{x+1} \geq 0$; б) $(x-2)\sqrt{x^2-6x+5} \geq 0$; в) $\sqrt{x+6} < \sqrt{x^2+2x}$.

130 Решите неравенство:

- а) $\sqrt{2x+1} > 7-x$; в) $\sqrt{3x} + \sqrt{x-2} < 10-2x$;
 б) $\sqrt{x^2-8} \leq 4-x$; г) $\sqrt{2x} + \sqrt{x-4} \geq 14-x$.



131 Дополните таблицу чисел-гигантов, используя понятие степени.

1000 единиц – 1 тысяча	10^3
1000 тысяч – 1 миллион	
1000 миллионов – 1 миллиард	
1000 миллиардов – 1 триллион	
1000 триллионов – 1 квадриллион	

Для записи числа один квинтиллион можно использовать следующие формы:
 1 000 000 000 000 000 или 10^{18} . Какая запись, на ваш взгляд, более удобна?

132 Напишите первые пять членов последовательности, общий член которой выражается формулой: а) $a_n = \frac{(-2)^n}{n^3}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.

133 Докажите, что последовательность a_n с общим членом $a_n = \frac{2}{n^2+1}$ убывает при всех $n \in N$.

134 Решите уравнение:

- а) $\sqrt{7x-2x^2-1} = 2$; в) $\sqrt[3]{x^2+15x+25} = -1$;
 б) $\sqrt{x^2-64} = \sqrt{8-6x}$; г) $\sqrt[3]{26-10x} = \sqrt[3]{10-x^2}$.

135 Решите уравнение:

- а) $x-5+\sqrt{x-2} = 3$; б) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x} = 1$; в) $x-1 = \sqrt[3]{x^3-5x^2+4x+2}$.



136 Решите неравенство:

- а) $\sqrt{3x+2} \geq 1$; б) $\sqrt{3x+1} < 2$; в) $\sqrt[3]{2x+1} \leq 3$; г) $\sqrt[3]{7x+2} > 2$; д) $\sqrt{x+2} > -3$.

137 Решите неравенство:

- а) $\sqrt{x^2-2x+6} \geq 3$; б) $\sqrt{2-x^2-x} < \sqrt{2}$; в) $\sqrt[3]{x^2-5x+7} \leq 1$.

138 Решите неравенство:

- а) $(x^2-5)\sqrt{x+3} \geq 0$; б) $(2x-5)\sqrt{x^2-5x+6} \leq 0$; в) $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x+5}$.

139 Решите неравенство:

а) $\sqrt{5-x} \geq x+1$; б) $\sqrt{5-x^2} < 3-x$; в) $\sqrt{x} + x \leq 7 - \sqrt{2x-7}$; г) $\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x} + x \leq 4$.

140 Напишите первые шесть членов последовательности (a_n) , если $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ и для всех $n \in N$ выполняется равенство $a_{n+2} = (a_{n+1})^2 + a_n - 1$.

141 Докажите, что последовательность (a_n) с общим членом $a_n = n^2 - n$ возрастает при всех $n \in N$.

142 Решите уравнение:

а) $\sqrt{5x-3x^2+7} = 3$; в) $\sqrt[3]{x^2+11x+1} = -3$;
б) $\sqrt{40-x^2} = \sqrt{4-9x}$; г) $\sqrt[3]{6+2x^2} = \sqrt[3]{5+4x}$.

143 Решите уравнение:

а) $5-x+\sqrt{x-2}=3$; б) $2\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}=2$; в) $x+2=\sqrt[3]{x^3+7x^2-2x+41}$.

С 144* Для последовательности Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) найдите значение выражения: $F_{2012}^2 - F_{2011} \cdot F_{2013}$.

Экспресс-тест № 5

Примерное время выполнения – 60 минут

Часть А

№ 1			
1	2	3	4

№ 1. Установите соответствие между данными выражениями:

1) $\sqrt[10]{(-243)^2}$; 2) $\sqrt[8]{(-3)^8}$; 3) $\sqrt[32]{t^8}$; 4) $\sqrt{\sqrt{t}}$

и выражениями, являющимися их упрощениями.

A) 3; Б) $\sqrt[4]{|t|}$; В) -3 ; Г) $\sqrt[4]{t}$.

№ 2			

№ 2. Найдите наименьшее целое число, не меньшее числа $\sqrt[4]{255}$.

A) 16; Б) 3; В) 4; Г) 5.

№ 3			
1	2	3	4

№ 3. Представьте каждое из выражений в виде одного корня некоторой степени:

1) $\sqrt[9]{12} \cdot \sqrt[6]{\frac{3}{18}}$; 2) $\frac{\sqrt[9]{16}}{\sqrt[2]{2}}$; 3) $\frac{\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[3]{10}}$; 4) $\frac{\sqrt[6]{21}}{\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[3]{3}}$

и установите соответствие с предложенными ответами:

A) $\sqrt[18]{125}$; Б) $\sqrt[18]{\frac{7}{27}}$; В) $\sqrt[18]{0,5}$; Г) $\sqrt[18]{486}$.

№ 4			

№ 4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{5}{\sqrt[5]{-5}}$.

A) $\sqrt[5]{625}$; Б) $-\sqrt[5]{625}$; В) 1; Г) -1 .

№ 5			

№ 5. Решите уравнение $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$.

A) $-5; 7$; Б) $0,5$; В) 6 ; Г) 7 .

Экспресс-тест № 5

№ 6

№ 6. Упростите выражение $\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{16})}$.

- A) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$; Б) $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; В) $\frac{\sqrt{x}-2}{x+4}$; Г) $\frac{1}{2}$.

Часть В

(ход решения записывается на отдельном листе)

№ 7

№ 7. Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}} \right)^2 \cdot \frac{a-b}{4(\sqrt{a}+\sqrt{b})}.$$

- А) $\frac{a-b}{8\sqrt[4]{a}}$; Б) 0; В) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; Г) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

№ 8

№ 8. Найдите все рациональные корни уравнения

$$4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

- А) 0,5; 2; Б) -0,5; 0,5; -2; 2; В) 1; 4; Г) \emptyset .

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 9. Определите наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{x^2-3x} > 4-x$.

Ответы и решения к тесту:

№ 1				№ 2	№ 3				№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
1	2	3	4	B	1	2	3	4	B	G	B	G	A
B	A	Б	Г		Г	В	А	Б					

№ 9

$$\sqrt{x^2-3x} > 4-x.$$

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 4-x < 0; \\ x^2 - 3x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4; \\ \begin{cases} x \leq 0; \\ x \geq 3; \Leftrightarrow x > 3,2. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-x \geq 0; \\ x^2 - 3x > (4-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4; \\ x > 3,2 \end{cases}$$

Наименьшим целым решением неравенства $x > 3,2$ является число 4.

Ответ: 4.

Шкала успешности:

10–11 баллов – отлично

8–9 баллов – хорошо

5–7 баллов – удовлетворительно

§ 3. Расширение понятия степени

4.3.1. Степень с целым показателем



Пусть кто-нибудь попробует вычеркнуть из математики степени, и он увидит, что без них далеко не уедешь.

М. В. Ломоносов (1711–1765),
первый русский учёный-естественноиспытатель,
энциклопедист

Мы знаем определение степени с натуральным показателем:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ раз}}$$

и определение степени с нулевым показателем:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0),$$

а также свойства степеней:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n; a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}, \text{ если } m \geq n, a \neq 0; (a^m)^n = a^{mn}.$$

Вспомним, как развивалось понятие степени. Сначала мы рассматривали степень только положительных чисел, затем отрицательных. В 7 классе мы ввели понятие степени для рационального числа a , потом, познакомившись с иррациональными числами, естественным образом распространили известное нам понятие степени (и её свойства) на множество действительных чисел. Поэтому теперь мы оперируем определением степени с основанием $a \in \mathbf{R}$ и показателем $n \in N_0$.

Далее мы продолжим расширять понятие степени – только теперь мы будем расширять множество значений, которые может принимать показатель степени. Расширим его до множества целых чисел. Первый шаг был сделан нами в 7 классе: мы ввели определение для степени числа с нулевым показателем ($a^0 = 1$). В этом пункте мы рассмотрим степень с отрицательным показателем.

Чтобы расширить известное нам определение на случай целого отрицательного показателя, воспользуемся фундаментальным принципом развития математической теории: *вновь введенное понятие не должно нарушать все доказанные ранее свойства.*

Рассмотрим степень a^{-n} ($n \in N$), представим её в виде a^{0-n} , тогда, сохраняя известное нам свойство частного степеней, будем считать, что $a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$.

Введём следующее определение *степени с целым отрицательным показателем*.

Определение. Пусть $a \neq 0$, тогда $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in N$.

Так, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ и т.д.

Эта запись облегчает запись десятичных дробей с большим числом нулей после запятой. Их можно записывать в виде отрицательных степеней числа 10:

$$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}; \text{ аналогично } 0,000001 = 10^{-6}.$$

Глава 4, §3, п.4.3.1

$$0,0003 = \frac{3}{10\,000} = 3 \cdot \frac{3}{10^4} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ и т.д.}$$

Самое важное, что при таком определении все **основные свойства степеней**:

$$\text{I. } a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$\text{II. } a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$\text{III. } (a^m)^n = a^{mn}$$

сохраняются при всех целых значениях m, n (а не только натуральных). Только теперь мы будем считать, что $a \neq 0$ (число 0 нельзя возводить в нулевую степень и целую отрицательную степень; при этом $0^n = 0$ при $n \in N$).

Например, $a^{-5} \cdot a^{-6} = a^{-11}$; $\frac{a^{23}}{a^{-3}} = a^{26}$; $(a^3)^{-5} = a^{-15}$ и т.д.

* * *

Докажем свойства I – III (соответствующие свойства для $m, n \in N$ считаем известными).

Доказательство.

I. Если одно из чисел m, n равно нулю (например, $m = 0$), то независимо от n

$a^{m+n} = a^{0+n} = a^n = 1 \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = a^m \cdot a^n$. Если ни одно из чисел m, n не равно 0, то рассмотрим разные случаи знаков чисел m и n .

1) Если $m, n \in N$ – свойство известно.

2) Если m, n – целые отрицательные числа, то $m = -p, n = -q$, где $p, q \in N$.

Тогда $a^{m+n} = a^{-p-q} = a^{-(p+q)} = \frac{1}{a^{p+q}} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = a^{-p} \cdot a^{-q} = a^m \cdot a^n$.

3) Пусть теперь числа m и n разных знаков (для определённости $m > 0, n < 0$).

Тогда $n = -p, p \in N$, и $a^{m+n} = a^{m-p}$.

Если $m = p$, то $a^{m+n} = a^0 = 1 = \frac{a^m}{a^p} = a^m \cdot \frac{1}{a^p} = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot a^n$.

Если $m > p$, то $a^{m+n} = a^{m-p} = \frac{a^m}{a^p} = a^m \cdot \frac{1}{a^p} = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot a^n$.

Наконец, если $m < p$, то $p - m \in N$.

Тогда $a^{m+n} = a^{m-p} = a^{-(p-m)} = \frac{1}{a^{p-m}} = \frac{1}{a^p} = \frac{a^m}{a^p} = a^m \cdot \frac{1}{a^p} = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot a^n$.

Свойство I доказано для любых $m, n \in Z, a \neq 0$.

II. Пусть $-n = p \in Z$. Тогда при любом $a \neq 0$ $a^{m-n} = a^{m+p} = a^m \cdot a^p = a^m \cdot a^{-n}$ (свойство уже доказано при всех $m, p \in Z$). Но $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ при любом целом (а не только натуральном) n . В самом деле, при $n \in N$ это следует из определения.

При $n = 0$ имеем: $a^{-0} = a^0 = 1 = \frac{1}{a^0}$.

Наконец, при $n = -k, k \in N$ имеем: $a^{-n} = a^k = \frac{1}{a^{-k}} = \frac{1}{a^n}$. Поэтому при любых m, n :

$$a^{m-n} = a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

Свойство II доказано для любых $m, n \in Z, a \neq 0$. Отметим, что тем самым доказано, что

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ при любом целом n .

III. Так как $1^n = 1$ для любого целого n , то

при $m = 0$ имеем: $(a^m)^n = (a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{mn}$;

при $n = 0$ имеем: $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{mn}$.

Пусть теперь ни одно из чисел m, n не равно 0. Рассмотрим разные случаи знаков чисел m и n .

Если $m, n \in N$ – свойство известно.

Если $m < 0, n < 0$, то $m = -p, n = -q, p, q \in N$.

$$\text{Тогда } (a^m)^n = (a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q} = \frac{1}{\frac{1}{(a^p)^q}} = \frac{1}{a^{pq}} = a^{pq} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}.$$

Если $m < 0, n > 0$, то $m = -p, p \in N$.

$$\text{Тогда } (a^m)^n = (a^{-p})^n = \left(\frac{1}{a^p}\right)^n = \frac{1}{(a^p)^n} = \frac{1}{a^{pn}} = a^{-pn} = a^{mn}.$$

Наконец, если $m > 0, n < 0$, то $n = -q, q \in N$.

$$\text{Тогда } (a^m)^n = (a^m)^{-q} = \frac{1}{(a^m)^q} = \frac{1}{a^{mq}} = a^{-mq} = a^{mn}.$$

Свойство III доказано для любых $m, n \in Z, a \neq 0$. ■

Приведём более сложные примеры преобразования выражений, содержащих степени с целыми показателями.

Пример 1. Упростить выражение:

$$\text{а) } \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot (2,25)^{-3}}{(3,375)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4}; \quad \text{б) } \frac{((-2)^3)^5 \cdot 4^{-2}}{(-2)^{14} \cdot 2^{-3}}; \quad \text{в) } (1 - (1 - 2^{-1})^{-1})^{-1} + (1 + (1 + 2^{-1})^{-1})^{-1}.$$

Решение.

а) Приведём степени к одному и тому же основанию.

$$\text{Заметим, что } 2,25 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, 3,375 = \left(\frac{3}{2}\right)^3, \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}.$$

Поэтому искомое выражение равно

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-3}}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-6}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5+4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{б) Искомое выражение равно } \frac{(-2)^{15} \cdot (2^2)^{-2}}{(-2)^{14} \cdot 2^{-3}} = (-2) \cdot \frac{2^{-4}}{2^{-3}} = (-2) \cdot 2^{-4+3} = (-2) \cdot 2^{-1} = -1.$$

$$\text{в) Так как } 1 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ а } 1 + 2^{-1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ то искомое выражение равно}$$

$$\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-1} + \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{-1} = (1 - 2)^{-1} + \left(1 + \frac{2}{3}\right)^{-1} = (-1)^{-1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = -1 + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Пример 2. Упростить выражение:

$$\text{а) } \frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-2n} - b^{-2n}} : \left(\frac{1}{b^{-n}} - \frac{1}{a^{-n}} \right)^{-1}, \text{ где } n \in Z;$$

$$\text{б) } \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-2} + b^{-2}} \right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{b}{3a} \right)^{-1} + \left(\frac{a}{3b} \right)^{-1} \right)^{-1} \cdot \frac{3(a^{-1} + b^{-1})}{(ab)^{-1}};$$

$$\text{в) } \left(\left(\frac{9^{-2}}{a^{-24}} - \frac{16}{b^{-8}} \right) : \left(\frac{a^{12}}{3^2} + \frac{b^4}{2^{-2}} \right) \right) : \left(\frac{3^{-1}}{a^{-6}} - \frac{1}{2^{-1}b^{-2}} \right).$$

Глава 4, §3, п.4.3.1

Решение.

а) Искомое выражение равно

$$\frac{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}}{\frac{1}{a^{2n}} - \frac{1}{b^{2n}}} \cdot \left(\frac{1}{b^{-n}} - \frac{1}{a^{-n}} \right) = \frac{\frac{b^n + a^n}{a^n b^n}}{\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} b^{2n}}} \cdot (b^n - a^n) = \frac{(b^n + a^n)(b^n - a^n)a^{2n}b^{2n}}{(b^{2n} - a^{2n})a^n b^n} = a^n b^n.$$

б) Искомое выражение равно

$$\begin{aligned} & \frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \cdot \left(\frac{3a}{b} + \frac{3b}{a} \right)^{-1} \cdot 3ab \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \cdot \left(\frac{3a^2 + 3b^2}{ab} \right)^{-1} \cdot 3ab \cdot \frac{a+b}{ab} = \\ & = \frac{\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}}{\frac{a+b}{ab}} \cdot \frac{ab}{3(a^2 + b^2)} \cdot 3ab \cdot \frac{a+b}{ab} = \frac{(a^2 + b^2)ab \cdot ab \cdot 3ab \cdot (a+b)}{(a+b)a^2 b^2 \cdot 3(a^2 + b^2) \cdot ab} = 1. \end{aligned}$$

в) Так как $\frac{9^{-2}}{a^{-24}} - \frac{16}{b^{-8}} = \frac{a^{24}}{9^2} - 4^2 b^8 = \left(\frac{a^{12}}{9} + 4b^4 \right) \left(\frac{a^{12}}{9} - 4b^4 \right)$, а $\frac{a^{12}}{3^2} + \frac{b^4}{2^{-2}} = \frac{a^{12}}{9} + 4b^4$, то

искомое выражение равно

$$\left(\frac{a^{12}}{9} - 4b^4 \right) : \left(\frac{a^6}{3} - 2b^2 \right) = \left(\frac{a^6}{3} - 2b^2 \right) \left(\frac{a^6}{3} + 2b^2 \right) : \left(\frac{a^6}{3} - 2b^2 \right) = \frac{a^6}{3} + 2b^2.$$

Пример 3. Упростить выражение:

$$a) \frac{4 \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \right)^{-1} + 3 \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \right)^{-1}}{\left(6^{-1} + (\sqrt{6})^{-1} \right)^{-1} + \left(1 + (\sqrt{6})^{-1} \right)^{-1}};$$

$$b) \frac{\sqrt{4-a^2} + a^2 \sqrt{(4-a^2)^{-1}}}{(4-a^2)^{-1}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{a} \right)^{-2}}, -2 < a < 2, a \neq 0.$$

Решение.

а) 1) Рассмотрим числитель дроби.

$$\text{Имеем: } \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \right)^{-1} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{6} - 3 \cdot 2}{3 - 2} = 3\sqrt{6} - 6;$$

$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \right)^{-1} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{4 \cdot 3 - 4\sqrt{6}}{3 - 2} = 12 - 4\sqrt{6},$$

поэтому числитель равен

$$4(3\sqrt{6} - 6) + 3(12 - 4\sqrt{6}) = 12\sqrt{6} - 24 + 36 - 12\sqrt{6} = 12.$$

2) Рассмотрим знаменатель дроби.

$$\text{Так как } \left(6^{-1} + (\sqrt{6})^{-1} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^{-1} = \left(\frac{1 + \sqrt{6}}{6} \right)^{-1} = \frac{6}{1 + \sqrt{6}}$$

$$\text{и } \left(1 + (\sqrt{6})^{-1} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{6}} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}},$$

то знаменатель равен

$$\frac{6}{1 + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}} = \frac{6 + \sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6} + 1)}{\sqrt{6} + 1} = \sqrt{6}.$$

3) Искомое выражение равно $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$.

6) 1) Рассмотрим первый множитель.

Числитель дроби равен

$$\sqrt{4-a^2} + a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4-a^2}} = \sqrt{4-a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{4-a^2}} = \frac{4-a^2+a^2}{\sqrt{4-a^2}} = \frac{4}{\sqrt{4-a^2}}.$$

Значит, дробь (первый множитель) равна $\frac{4}{\sqrt{4-a^2}} \cdot (4-a^2) = 4\sqrt{4-a^2}$.

2) Второй множитель равен

$$\sqrt{\left(1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{-1}} = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)^{-1}} = \sqrt{\left(\frac{4-a^2}{4}\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{4}{4-a^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}.$$

3) Искомое произведение равно $4\sqrt{4-a^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-a^2}} = 8$.

К

145

Запишите числа короче:

- а) 1000; б) 2 000 000; в) 3 000 000 000; г) 4 000 000 000 000.

Какое понятие вы использовали для выполнения задания?

146

Упростите:

а) $a^5 \cdot a^{10} \cdot a^{10}$; б) $b^4 : b^3$; в) $\frac{x \cdot x^2 \cdot x^{12}}{x^4}$; г) $(y^5)^2 : y^{10}$; д) $\frac{x \cdot x^2}{(x^4)^2}$.

147

Какие числа записаны при помощи степеней?

- а) 10^2 ; б) $3 \cdot 10^3$; в) $6 \cdot 10^6$; г) $9 \cdot 10^9$.

Запишите их без использования степени.

148

1) Какие числа записаны при помощи степеней?

- а) 10^{-2} ; б) $3 \cdot 10^{-3}$; в) $6 \cdot 10^{-6}$; г) $9 \cdot 10^{-9}$.

2) Чем отличается это задание от предыдущего? Достаточно ли ваших знаний о степени числа для выполнения этого задания? Расширьте понятие степени для отрицательного показателя, следуя плану:

1. Преобразуйте a^{-n} ($n \in N$), используя известное свойство степеней $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$, допустив, что оно верно и при $n > m$.

2. Предположите, что называют степенью с *отрицательным* показателем.

3. Сопоставьте свое предположение с определением степени с *отрицательным* показателем на с. 45.

3) Вернитесь к заданию, вызвавшему затруднение, и выполните его.

149

Запишите числа, используя понятие степени с *отрицательным* показателем:

а) $\frac{1}{1\ 000\ 000\ 000}$; б) 0,000002; в) 0,000000003; г) 0,00000000004.

150

Вычислите:

а) 5^{-2} ; б) 5^{-3} ; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; г) $\frac{1}{5^{-3}}$; д) $\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-2}$.

Глава 4, §3, п.4.3.1

151 Упростите выражение:

а) $\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^5}{((-2)^3)^2 \cdot (-2)^{-7}};$ б) $\frac{((-3)^2)^4 \cdot 9^{-5}}{(-27)^2 \cdot 3^{-7}};$ в) $\frac{\left(\frac{-5}{2}\right)^{-3} \cdot 0,16^{-2}}{6,25^2 \cdot 0,4^5};$ г) $(1 + (2^{-1} + 3^{-1})^{-1})^{-1}.$

152 Упростите выражение:

а) $\left(\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}}\right)^{-1} \cdot \frac{a^{-1} + b^{-1}}{(ab)^{-1}};$
б) $((a^{-3} - a^{-1}b^{-2} - b^{-3})(b^3 - a^2b - a^3)^{-1}).$

153 Второй член арифметической прогрессии составляет 107% от первого. Сколько процентов от первого члена составляет десятый член этой прогрессии?

154 Первый член арифметической прогрессии равен -5 , сумма двадцати трёх её первых членов равна 1909 . Найдите разность и двадцать третий член этой прогрессии.

155 Решите неравенство:

а) $\sqrt{5x-1} < -1;$ в) $\sqrt{6x+5} \geq 3;$ д) $\sqrt{x+4} < 5;$
б) $\sqrt[3]{1-2x} \leq -2;$ г) $\sqrt{3x-2} > -3;$ е) $\sqrt[5]{x-6} \geq -2.$

156 Решите неравенство:

а) $\sqrt{5x^2 - x + 5} > 3;$ б) $\sqrt{x^2 - 8x} < 2;$ в) $\sqrt[3]{x^2 - 9x + 10} \leq -2.$

157 Упростите выражение:

а) $\frac{(625^{-2})^3 \cdot 125^7}{(-25)^3 \cdot 5^{-10}};$ б) $\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^7 \cdot 0,36^4}{\left(-7\frac{58}{81}\right)^{-2} \cdot 0,6^{-5}};$ в) $\sqrt{\frac{13}{(1^{-1} + (2^{-2} + 3^{-3})^{-1})^{-1}}}.$

158 Упростите выражение:

а) $\left(\left(\frac{a^{-3} - b^{-3}}{a^{-1} - b^{-1}} + a^{-1}b^{-1}\right) : (a+b)^2\right)^{-1};$
б) $\left(\frac{(a-b)(a^2+b^2)}{a^{-4} - b^{-4}}\right) : \left(\frac{a^4}{b^{-4}}\right).$

159 Второй член арифметической прогрессии составляет 88% от первого. Сколько процентов от первого члена составляет пятый член этой прогрессии?

160 Первый член арифметической прогрессии равен 81 , а сумма тридцати четырёх её первых членов равна 510 . Найдите разность и тридцать четвёртый член этой прогрессии.

161 Решите неравенство:

а) $\sqrt{4-5x} \leq 0;$ в) $\sqrt{6-x} > 5;$ д) $\sqrt{5-x} \leq 6;$
б) $\sqrt{x+4} \leq -8;$ г) $\sqrt{7x+9} > -9;$ е) $\sqrt[5]{x+1} \geq -3.$

162 Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} \geq 3;$ б) $\sqrt{x^2 - 5} < 2;$ в) $\sqrt[3]{x^2 + 7x - 29} > 1.$

163 Числа $x^3 + x^{-1}$ и $x + x^{-3}$ – рациональные. Докажите, что x – рациональное число.